182

APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES À LA GÉOMÉTRIE. HOMOGRAPHIES.

I GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Dans cette partie, on identifiera $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

1 Définitions et Quelques propriétés

On identifiera $M=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec son affixe $z_M = x+iy \in \mathbb{C}$.
On notera $M(z)$ pour signifier $z = z_M$.

Prop 1: ([Eid], V.1.2)
Soient $M, M' \in \mathbb{R}^2$.
Alors $\mathrm{Re}(\overline{z_M} z_{M'}) = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}$ et $\mathrm{Im}(\overline{z_M} z_{M'}) = \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.

Ex 2:
- Une condition nécessaire et suffisante pour que trois points $A_1(z_1)$, $A_2(z_2)$ et $A_3(z_3)$ soient alignés : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix} = 0$ ([Tri], exo II.1.3)
- L'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta\,[\pi]$ est une droite si $\theta \equiv 0\,[\pi]$, un cercle sinon. ([Tri], exo III.8)
- L'aire d'un triangle $A(a)B(b)C(c)$ vaut : ([Eid], V.3.1)
$$S = \frac{1}{4i}\left[(a-b)\bar{c} + (b-c)\bar{a} + (c-a)\bar{b}\right].$$

2 Angles

Prop 3: Exponentielle complexe ([Nou], 2.2)
La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence infini; elle converge donc absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$ et uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.
$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes; son noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$.
Quand on note $\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$, on a un nouveau morphisme de groupes : $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{array}\right.$

Prop 4: ([Aud], III.1)
Soient $\vec{u}, \vec{v} \in S^1$ (cercle de centre O et de rayon 1).
Il existe une unique rotation envoyant $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.
On en déduit une relation d'équivalence :
$(\vec{u},\vec{v})\,\mathcal{R}\,(\vec{u'},\vec{v'}) \Leftrightarrow$ la même rotation envoie $\vec{u}$ sur $\vec{u'}$ et $\vec{v}$ sur $\vec{v'}$.

Déf 5: ([Aud], III.1)
L'angle orienté de $(\vec{u},\vec{v})$ est la classe de $(\vec{u},\vec{v})$ dans $(S^1)^2/\mathcal{R}$.

Prop 6:
On a la suite de surjections : $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{U} \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow O^+(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (S^1)^2/\mathcal{R}$
$\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto (z \mapsto e^{i\theta} z) \mapsto \overline{((0,1),(\cos\theta,\sin\theta))}$

App 7:
- Coordonnées polaires : $\forall z\in\mathbb{C}^*, \exists!\,(r,\theta)\in\mathbb{R}^{+*}\times[0,2\pi[$, $z = re^{i\theta}$.
- Caractérisations des triangles équilatéraux : ([Eid], V.8.1)
le triangle $A(a)B(b)C(c)$ est :
  - équilatéral direct $\Leftrightarrow a+bj+cj^2 = 0$
  - équilatéral indirect $\Leftrightarrow a+bj^2+cj = 0$

  Et si on a $a+b+c \neq 0$, alors ABC est équilatéral $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0$.
- Les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont les sommets d'un n-gone régulier.
- Théorème de l'angle au centre : ([Aud], prop III.1.18)
Si A, B et C sont trois points distincts d'un cercle de centre O,
Alors on a l'égalité d'angles orientés de vecteurs :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

3 Transformations du plan.

Déf 8: Similitudes directes ([Aud], p. 93)
Les similitudes directes sont les applications de la forme $z \mapsto az+b$, où $a\in\mathbb{C}^*$, $b\in\mathbb{C}$; le rapport vaut $|a|$ et l'angle est un argument de a, défini modulo 2π.

Prop 9:
L'ensemble des similitudes directes forme un groupe, engendré par les rotations ($z\mapsto e^{i\theta}z$, $\theta\in[0,2\pi[$), les homothéties ($z\mapsto\lambda z$, $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$) et les translations ($z\mapsto z+b$, $b\in\mathbb{C}$).

Cor 10: ([Aud], p. 91)
1) Les similitudes directes conservent les angles orientés et les rapports de distances.
2) Elles envoient une droite $\mathcal{D}$ sur une droite $\mathcal{D}'$ telle que $(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ soit l'angle de la similitude (modulo π)
3) Une similitude directe de rapport k envoie un cercle de rayon R sur un cercle de rayon kR dont le centre est l'image du centre.

Déf 11 :
On définit la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ comme la réflexion d'axe (Ox).
On appelle similitudes indirectes les applications $z \mapsto a\bar{z}+b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Déf 12 :
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est appelée isométrie affine
$\Leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad |f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|$.

Prop 13 :
Le groupe engendré par $\{z \mapsto az+b \mid a \in \mathbb{U}\}$ et la conjugaison est l'ensemble des isométries du plan.

Prop 14 : ([Aud], p. 93)
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire qui conserve les angles (resp. les renverse).
Alors f est une similitude directe (resp. indirecte).

Thm 15 : ([Aud], ex III.71)
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une bijection de classe C^1 qui conserve les angles.
Alors f est une similitude.

Déf 16 : Inversion ([Eid], V.7.1)
L'inversion analytique (resp. géométrique) de pôle $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est l'application qui à $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ associe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $(z'-a)(z-a) = k$ (resp. $(z'-a)\overline{(z-a)} = k$.)

Rq 17 : ([Eid], V.7.1)
En notant $A(a)$, $M(z)$ et $M(z')$, l'inversion géométrique de pôle A et de rapport k admet pour définition équivalente : au point M elle associe le point M' tel que A, M et M' sont alignés et $\overline{AM} \times \overline{AM'} = k$. (longueurs algébriques).

Prop 18 : ([Eid], V.7.1)
Soient M' et N' images de M et N par une inversion de pôle A et de rapport k.
Alors $M'N' = k . \dfrac{MN}{AM \times AN}$.

App 19 : Théorème de Ptolémée ([Eid], V.7.2)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe.
$ABCD$ est inscriptible dans un cercle
$\Leftrightarrow AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$

4 Polynômes et barycentres

Déf 20 :
Le barycentre de $A_1(\alpha_1), \dots, A_n(\alpha_n)$ est l'unique point G tel que $z_G = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_{A_i}$.

Thm 21 : Gauss-Lucas
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P.

Thm 22 : Ellipse de Steiner
Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ trois points distincts du plan affine.
Si on note $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ et ω_1, ω_2 les racines de P',
Alors l'ellipse de foyers $F_1(\omega_1)$ et $F_2(\omega_2)$ tangente à un côté du triangle ABC est tangente à tous les côtés en leur milieu.

DÉVELOPPEMENT N°1

II GÉOMÉTRIE PROJECTIVE COMPLEXE

1 Espaces projectifs

Soit E un $\mathbb{C}$ev de dimension finie $n+1$.

Déf 23 : ([Sam], déf 1)
L'espace projectif associé à E, noté $\mathbb{P}(E)$, est $E\setminus\{0\}/\sim$, où $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*, \ x = \lambda y$.
On note $p : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ la projection d'un élément sur sa classe.

Rq 24 : $\mathbb{P}(E)$ est aussi l'ensemble des droites vectorielles de E.
On note également : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.
On définit la dimension : $\dim \mathbb{P}(E) = \dim E - 1$.

Ex 25 :
$\mathbb{P}_0(\mathbb{C})$ s'appelle un point projectif.
$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ s'appelle une droite projective.

Déf 26 :
Soit S^2 la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^3$, $N(0,0,1)$ le pôle Nord de S^2.
On identifie $\mathbb{C}$ à $\{(x,y,0) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$.
On définit la projection stéréographique $\pi : \begin{vmatrix} S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ P \longmapsto (PN) \cap \mathbb{C} \end{vmatrix}$.
Elle est continue, et on peut la prolonger par $\pi(N) = \infty$.
$S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la sphère de Riemann.

(Voir en annexe)

Prop 27: $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$

On a en effet les bijections :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \xrightarrow{\pi^{-1}} & S^2 \\ \{\lambda(z_1,0) \mid \lambda \in \mathbb{C}\} & \longmapsto & \infty & \longmapsto & N \\ \{\lambda(z_1,z_2) \mid \lambda \in \mathbb{C}\} & \longmapsto & \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} & \longmapsto & \pi^{-1}\left(\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}\right) \end{array} \quad ; \ z_2 \neq 0.$$

Déf 28: ([Sam], déf 4)

Un repère projectif est un système de points $(P_0, \dots, P_{n+1})$ de $\mathbb{P}(E)$ tels qu'il existe une base $(e_0, \dots, e_n)$ de E et $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P_i = p(e_i)$, $P_{n+1} = p(e_0 + \dots + e_n)$.

Ex 29: ([Sam], p. 16)

Un repère projectif de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est constitué de 3 points.

Par exemple : $\left(p\left(\binom{0}{1}\right), p\left(\binom{1}{1}\right), p\left(\binom{1}{0}\right)\right)$, où $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

2 Homographies et birapport

Déf 30: ([Sam], p. 18)

Soient E et F deux espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire injective.

Alors u induit une unique application $P(u)$ telle que le diagramme ci-contre commute.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ {\scriptstyle p_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_F} \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{P(u)} & \mathbb{P}(F) \end{array}$$

Si u est bijective, $P(u)$ est appelée homographie.

Prop 31: ([Sam], p. 19)

Si $u, v \in GL(E)$, alors $P(u \circ v) = P(u) \circ P(v)$.

L'ensemble des homographies de $\mathbb{P}(E)$, noté $PGL(E)$, est un groupe, isomorphe à $GL(E) / \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Prop 32: ([Sam], thm 4)

Soient $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(E')$ deux espaces projectifs de dimension n, ayant $(P_0, \dots, P_{n+1})$ et $(P'_0, \dots, P'_{n+1})$ pour repères projectifs respectifs.

Il existe une unique homographie $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E')$ telle que : $\forall i \in [\![0, n+1]\!]$, $h(P_i) = P'_i$.

Rq 33: ([Aud], p. 194)

Une homographie $f : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ s'écrit, pour $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, où $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$.

Cela se simplifie en $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec la convention $\frac{-d}{c} \mapsto \infty$ et $\infty \mapsto \frac{a}{c}$.

Prop 34: ([Aud], prop VI.7.2 et cor VI.7.3)

Le groupe $PGL_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$. Ses éléments conservent les angles orientés.

Déf 35: Birapport. ([Sam], p. 71)

$PGL(E)$ agit sur $\mathbb{P}(E)$ 3-transitivement et simplement.

Ainsi, pour $a,b,c \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ distincts et $d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, on peut définir le birapport $[a,b,c,d]$ comme $h(d)$ où h est l'unique homographie telle que $h(a) = \infty$, $h(b) = 0$ et $h(c) = 1$.

Rq 36: ([Sam], thm 21)

On a aussi l'expression $[a,b,c,d] = \dfrac{\frac{d-b}{d-a}}{\frac{c-b}{c-a}}$, où a,b,c sont distincts.

Prop 37: ([Sam], thm 20)

Soient $(a,b,c,d), (a',b',c',d') \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})^4$ tels que a,b,c et a',b',c' sont 2 à 2 distincts.

Il existe une homographie envoyant un quadruplet sur l'autre $\Leftrightarrow [a,b,c,d] = [a',b',c',d']$.

Thm 38:

Soit f une bijection de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

f est une homographie $\Leftrightarrow$ f conserve les birapports.

3 Groupe circulaire

Prop 39: ([Aud], prop VI.7.5)

Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan.

A, B, C et D sont alignés ou cocycliques $\Leftrightarrow [z_A, z_B, z_C, z_D] \in \mathbb{R}$.

Cor 40: ([Aud], cor VI.7.7)

Toute homographie de la droite projective complexe transforme un cercle ou une droite en un cercle ou une droite.

Déf 41: Groupe circulaire ([Aud], p. 203)

On appelle groupe circulaire le groupe engendré par les homographies et la conjugaison complexe.

Prop 42: ([Aud], prop VI.7.9)

Le groupe circulaire est engendré par les inversions et les réflexions.

Cor 43: ([Aud], cor VI.7.10)

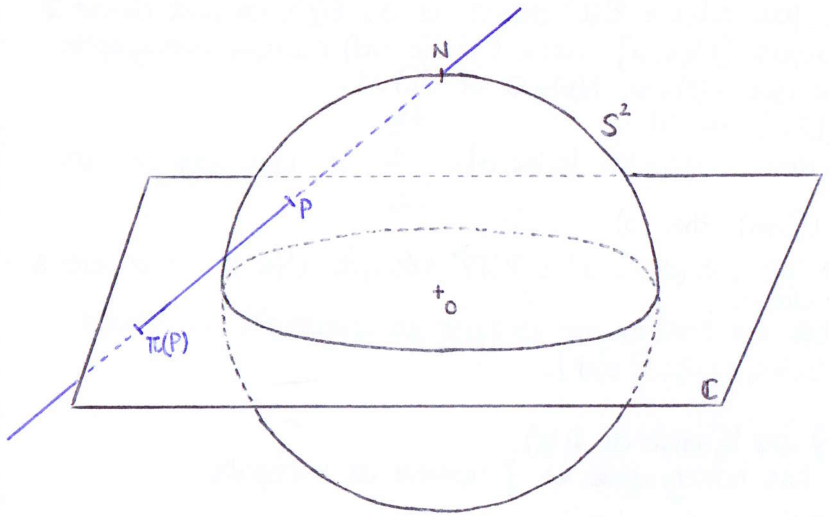
Les éléments du groupe circulaire préservent les angles non-orientés.

Thm 44: ([Aud], thm VI.7.11)

Le groupe circulaire est exactement l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui laissent stable l'ensemble des droites et des cercles.

DÉVELOPPEMENT N°2

Annexe : Projection stéréographique.



Références :

[Eid] : J.-D. Eiden, Géométrie analytique classique, Calvage & Mounet, 2009.

[Tri] : J. Trignan, La géométrie des nombres complexes, Bréal, 1993.

[Nou] : I. Nourdin, Agrégation de mathématiques - Épreuve orale - 68 thèmes pour se préparer efficacement, Dunod, 2e éd, 2006

[Aud] : M. Audin, Géométrie, EDP Sciences, 2006.

[Sam] : P. Samuel, Géométrie projective, PUF, 1e éd., 1986.