234

ESPACES L^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Cadre : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; λ mesure de Lebesgue

I DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

1 Espaces $\mathcal{L}^p$

Déf 1 : • Pour tout $p > 0$, on définit : ([BP], p. 153)

$\mathcal{L}^p(\mu) := \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurable $\mid \int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$.

On note aussi $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

• Dans le cas $p = +\infty$, on a : ([BRE], p. 56)

$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurable $\mid \exists M > 0,\ \mu(|f| > M) = 0 \}$

On note alors $\|f\|_\infty := \inf \{ M > 0 \mid \mu(|f| > M) = 0 \}$

Ex 2 : Si m désigne la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$,
Alors $\mathcal{L}^p(m) = \ell^p(\mathbb{N}) := \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} |a_n|^p < +\infty \}$.

Prop 3 : Inégalité de Hölder ([BP], p. 155) + ([BP], p. 173)
Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, où $p, q \geq 1$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (éventuellement $p = \infty$ ou $q = +\infty$)
Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Rq 4 : • Si $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ pour $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$.

Prop 5 : Inégalité de Minkowski ([BP], p. 158)
Soient $p \in [1, +\infty]$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.
Alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

2 Espaces L^p

Problème : $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ n'est pas un e.v. normé, mais seulement un e.v. semi-normé : il manque la propriété « $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$. »

Solution : Quotienter $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence :

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \mu\text{-p.p.}$$

Déf 6 : $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \{ f \in \mathcal{L}^p(\mu) \mid \|f\|_p = 0 \}$. ([BP], p. 161)

$L^p(\mu)$ est un e.v. normé.

Thm 7 : Riesz-Fischer ([BRE], p. 57)
Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach) DÉVELOPPEMENT N°1

↳ Ce résultat utilise la convergence L^p-dominée.

3 Convergence dans les espaces L^p

Prop 8 : Soit $(f_n)_n \subset L^p(\mu)$ et $f \in L^p(\mu)$ tels que $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $1 \leq p \leq +\infty$
Alors il existe une sous-suite extraite $(f_{n_k})_k$ telle que :
• μ-presque partout sur X, $f_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$ ([BRE], p. 58)
• $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ μ-pp. sur X avec $h \in L^p(\mu)$

Cex 9 : Dans $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, ([BP], p. 164)
Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$, $f_{2^n + k} := \mathbb{1}_{[k/2^n, (k+1)/2^n[}$:
On a alors $\|f_{2^n+k}\|_p = 2^{-n/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais $f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{\lambda\text{-pp}} 0$

Thm 10 : Convergence L^p-dominée, $1 \leq p < +\infty$ ([BP], p. 165)
Soit $(f_n)_n \subset L^p(\mu)$, une suite convergeant μ-pp vers f.
• Si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$, alors $f \in L^p(\mu)$.
• Si il existe $g \in L^p(\mu)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ-pp, alors $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p(\mu)} f$.

Cex 11. Sans domination
Soit $f_n = n \mathbb{1}_{[0, 1/n]}$. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\lambda\text{-pp}} 0$, mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_p = 1$.

4 Densité dans les espaces L^p

Prop 12 :
• Si $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$. ([BP], p. 166)
• L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$. ([BP], p. 174)

Th 13 : Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, quand $p \in [1, +\infty[$; ([BP], p. 167)
L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$

Th 14. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, quand $p \in [1, +\infty[$; ([ZQ], p. 324)
L'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$.

App 15 : Riemann-Lebesgue
Si $f \in L^1$, alors $\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$.

Prop 16 : $L^1(\lambda) \cap L^2(\lambda)$ est dense dans $L^2(\lambda)$. ([BP], p. 315)

Thm 17 : ([BRE], p. 62)
Soit $p \in [1, +\infty[$, $L^p(\mu)$ est séparable.
(On montre que l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les $\mathbb{1}_R$ où R désigne un pavé de X à sommets rationnels y est dense.)

Thm 18: ([BRE], p. 66)

$L^\infty(\mu)$ n'est pas séparable.

(On montre que $(O_a)_{a\in X}$ est une famille non-dénombrable d'ouverts non-vides, 2 à 2 disjoints, où $r_a < d(a, \Omega^c)$ et $O_a = \{f \in L^\infty(\mu) \mid \|f - \mathbb{1}_{B(a,r_a)}\|_\infty < \frac{1}{2}\}$)

II RELATIONS ENTRE LES ESPACES L^p

1 Inclusions des espaces L^p

Prop 19: ([BP], p. 154) + ([BP], p. 174)

- Si $\mu(X) < \infty$, alors $0 < p \leq q \leq \infty \Rightarrow L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$
- Si m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, alors $0 < p \leq q \leq \infty \Rightarrow \ell^p(\mathbb{N}) \subseteq \ell^q(\mathbb{N})$

Cex 20. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue λ ([BP], p. 154)

$\mathbb{1}_{]0,1]} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(\lambda) \setminus L^2(\lambda)$ et $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in L^2(\lambda) \setminus L^1(\lambda)$.

Donc $L^1(\lambda)$ et $L^2(\lambda)$ ne sont pas comparables.

Prop 21. ([BP], p 173)

- Si $f : X \to \mathbb{K}$ est mesurable, alors $\|f\|_\infty \leq \limsup_{p\to\infty} \|f\|_p$.
- $\forall f \in \bigcup_{p>0} L^p(\mu)$, $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2 Dualité

Pour $p \in [1, +\infty]$, on définit p', l'exposant conjugué, par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Thm 22: Théorème de représentation de Riesz ([BRE], p. 61)

Soit $p \in]1, +\infty[$, et soit $\varphi \in (L^p)'$.

Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique, tel que: $\forall f \in L^p$, $\langle \varphi, f\rangle = \int uf \, d\mu$

De plus, $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$.

Cor 23:

Si $p \in]1, +\infty[$, le dual de L^p est $(L^p)' \simeq L^{p'}$.

Notamment, on en déduit que L^p est réflexif: $(L^p)'' \simeq L^p$.

Thm 24: ([BRE], p. 63)

Soit $\varphi \in (L^1)'$. Alors il existe $u \in L^\infty$ unique, tel que: $\forall f \in L^1$, $\langle \varphi, f\rangle = \int uf \, d\mu$

De plus $\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$.

Cex 25: Soit φ le prolongement sur L^∞ de $\varphi_0 : \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{array} \right.$.

Il n'existe pas de fonction $u \in L^1$ telle que: $\forall f \in L^\infty$, $\langle \varphi, f\rangle = \int uf \, d\mu$.

([BRE], p. 65)

Cor 26:

On a: $(L^1)' \simeq L^\infty$ mais L^1 n'est pas le dual de L^∞.

En conséquence, ni L^1, ni L^∞, n'est réflexif.

III EXEMPLES D'UTILISATION DES ESPACES L^p.

1 Convolution

Déf 27:

Si f et g sont deux fonctions quelconques on appelle produit de convolution la fonction (si elle est bien définie):

$$(f*g)(x) = \int_X f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

Thm 28: Inégalité de Young ([HL], p. 149)

Soient $p, q \in [1, +\infty]$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Soit r tel que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $f*g \in L^r$ et $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Prop 29: Régularisation ([HL], p. 148)

Soient $p, p' \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués.

Si $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$, alors $f*g$ est uniformément continue et bornée et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Si de plus $1 < p < +\infty$, alors $\lim_{|x|\to\infty} (f*g)(x) = 0$.

Prop 30: ([OA], p. 177)

Si $f \in L^1$ et $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

Alors $f*g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Problème: L'anneau $(L^1, +, *)$ n'est pas unitaire.

Déf 31: Approximation de l'unité. ([HL], p. 151)

On appelle approximation de l'unité toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de L^1 avec:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \geq 0$ et $\int \varphi_n(x)\, dx = 1$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \varphi_n(x)\, dx = 0$.

Prop 32: ([HL], p. 152)

Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.

Si $f \in L^p$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f*\varphi_n \in L^p$, $\|f*\varphi_n\|_p \leq \|f\|_p$

De plus $\lim_{n\to+\infty} f*\varphi_n = f$ dans L^p.

App 33: Cela permet de montrer la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

App 34: Soit $p \in]1, +\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, $Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$, pour $x > 0$.

Inégalité de Hardy: $Tf \in L^p(\mathbb{R}^+)$ et $\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}$

2 En probabilités ([BL], p. 124-128)

Prop 35: La convergence L^p implique la convergence en probabilité.

Cex 36: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim (1 - \frac{1}{n^p})\delta_0 + \frac{1}{n^p}\delta_n$

Ainsi $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$, mais $\mathbb{E}[|X_n|^p] = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déf 37:
Une famille de va $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable $\Leftrightarrow \lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0$.

Thm 38:
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p \geq 1$. S'équivalent :

- $(X_n)_n$ converge vers X dans L^p
- $(|X_n|^p)_n$ est uniformément intégrable et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$.

Thm 39: Loi forte des grands nombres. ([BL], p. 140)
Soit $(X_n)_n$ une suite de vaiid, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.
$X_1 \in L^1 \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{ps} \mathbb{E}[X_1]$.

Thm 40: Théorème central limite ([BL], p. 145)
Soit $(X_n)_n$ une suite de vaiid L^2, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.
On a : $\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n \operatorname{Var}(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

IV LE CAS PARTICULIER DE L^2

1 Conséquences de la structure hilbertienne

L'application définie sur $L^2 \times L^2$ par $\langle f, g\rangle = \int_X f\bar{g}\, d\mu$ fait de L^2 un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

En particulier, cela signifie que L^2 vérifie le théorème de projection sur un convexe fermé.

Aussi, L^2 est son propre dual et le théorème de représentation de Riesz dit que : $\forall \varphi \in (L^2(\mu))'$, $\exists! g \in L^2(\mu)$, $\forall f \in L^2(\mu)$, $\varphi(f) = \int_X f\bar{g}\, d\mu$.

2 $L^2(\mathbb{T})$ et les séries de Fourier ([OA], p. 122-124)

Notations : • $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

- $\forall f, g \in L^2(\mathbb{T})$, $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n : x \mapsto e^{inx}$ et $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.
- $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = \sum_{|n|\leq N} c_n(f) e_n$.

Thm 41: $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.
Ainsi $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$.
On en déduit : $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Prop 42: Égalité de Parseval.
$\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.

App 43: Parseval fournit par exemple $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ...

App 44: Inégalité de Bernstein ([ZQ], p. 102)
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, distincts, et $\lambda = \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|$.
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $h : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sum_{j=1}^n a_j e^{i\lambda_j t} \end{array}$.

Alors $\|h'\|_\infty \leq \lambda \|h\|_\infty$.

3 Transformation de Fourier

Déf 45. ([ZQ], p. 327)
Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par :
$\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(t)\, dt$.

Prop 46: ([ZQ], p. 327) + ([RUD], p. 173) + ([RUD], p. 176).

- Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est continue et $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$, et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$
- $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Thm 47: Inversion de la transformée de Fourier ([RUD], p. 178)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
On définit : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi$ pour $x \in \mathbb{R}$
Alors g est continue et $g = f$ pp sur $\mathbb{R}$

Cor 48: ([RUD], p. 179)
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = 0$,
Alors f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

Thm 49: Théorème de Plancherel ([RUD], p. 179)

- Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f} \in L^2$.
- L'application $\Phi : \begin{array}{|l} L^1 \cap L^2 \to L^2 \\ f \mapsto \hat{f} \end{array}$ peut être prolongée en une isométrie linéaire de L^2.

On donne ainsi un sens à la transformée de Fourier des fonctions de L^2.

[BP] : Marc Briane, Gilles Pagès, Théorie de l'intégration (5e édition)

[BRE] : Haïm Brézis, Analyse fonctionnelle

[ZQ] : Hervé Queffélec, Claude Zuily, Analyse pour l'agrégation (4e édition)

[HL] : Francis Hirsch, Gilles Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle

[OA] : Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré, Objectif Agrégation

[BL] : Ph. Barbe, M. Ledoux, Probabilité.

[RUD] : W. Rudin, Analyse réelle et complexe.