236

ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES MÉTHODES DE CALCULS D'INTÉGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLE(S) RÉELLE(S)

I MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES

1 Primitives

a Primitives usuelles ([GOU], p. 133)

Soit f continue et F une de ses primitives : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Ex 1 : $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_a^b$; $\int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arccos x]_a^b$.

b Fractions rationnelles ([GOU], p. 133)

Décomposition en éléments simples pour se ramener à $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ et à $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}\,dx$ (où $c^2 - 4d < 0$).

Ex 2 : $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + k$, $k \in \mathbb{R}$

c Polynômes en sinus et cosinus ([GOU], p. 135)

On veut calculer $\int \sin^n(x)\cos^m(x)\,dx$ où $m, n \in \mathbb{N}$.

Si m et n sont pairs : linéarisation ; sinon : changement de variable.

Ex 3 : $\int \cos^4(x)\sin^2(x)\,dx = \int \cos^4(x)(1-\cos^2(x))\,dx = \int \cos^4(x)\,dx - \int \cos^6(x)\,dx$

où $\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} + 4\,\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + 3\right)$

$= \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}$.

2 Intégration par parties

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Ex 4 : Intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx = W_{n-2} - \frac{1}{n-1} W_n$.

Ex 5 : Fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!$

3 Changement de variable

Prop 6 : Si φ est un C^1-difféomorphisme, pour une variable,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

Ex 7 : Règles de Bioche pour fractions rationnelles en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Étude des invariances de $R(\cos x, \sin x)\,dx$: ([GOU], p. 135)

- Si invariance $x \to -x$, on pose $t = \cos x$
- ———— $x \to \pi - x$, ———— $t = \sin x$
- ———— $x \to \pi + x$, ———— $t = \tan x$

Ex 8 : $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx \xrightarrow[t=\cos x]{} \int \frac{1-t^2}{1+t^2}(-dt) = t - 2\arctan t + k$

$\hookrightarrow \cos x - 2\arctan(\cos x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

Prop 9 : Pour une fonction de plusieurs variables :

Si $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ C^1-difféomorphisme, $V = \varphi(U)$, $\int_V f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,|J\varphi(u)|\,du$

où $J\varphi(u) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(u)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

App 10 : Coordonnées cartésiennes $\longleftrightarrow$ polaires

Si Δ représente D en coordonnées polaires :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

App 11 : Volume de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^d$ ([BP], p. 246)

- Si d est pair, $V_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}$
- Si d est impair, $V_d = \frac{2^d\,\pi^{(d-1)/2}\,(d-1/2)!}{d!}$

Thm 12 : Fubini ([GOU], p. 333)

Sous certaines conditions $\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int\left(\int f(x,y)\,dx\right)dy = \int\left(\int f(x,y)\,dy\right)dx$

(ℒ par exemple sur $P \times Q$ où P et Q pavés compacts de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.)

Ex 13 : Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Pour $a > 0$, $D_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a\}$ et $C_a := [-a, +a]^2$.

$I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi(1 - e^{-a^2})$

$J_a = \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2$

$\Big\}$ $I_a \leq J_a \leq I_{\sqrt{2}a}$ puis $a \to +\infty$.

II MÉTHODES ALTERNATIVES

1 Pour des suites et séries de fonctions

Thm 14 : Convergence dominée ([GOU], p. 147)

Si $(f_n)_n$ continues par morceaux et dominées par φ, intégrable, continue par morceaux,

Et si (f_n) converge simplement vers f, continue par morceaux,

Alors les (f_n) et f sont intégrables et $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

App 15 : Continuité de la transformée de Fourier

Si $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, alors $\hat{f}(y_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy_n}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}\,dx = \hat{f}(y)$

App 16 : Intégrale de Fresnel

$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{i\pi/4}$

DÉVELOPPEMENT N° 1 ([GOU], p. 342)

Thm 17:
Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions intégrables, continues par morceaux.
Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers S continue par morceaux
Et si $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge
Alors S est intégrable et $\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

Ex 18: On a : $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} x^2 dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, via $\sum_{n\geq 1} e^{-nx} x^2$.

2 Sommes de Riemann ([GOU], p. 124-125)

Déf 19:
Soit f bornée sur $[a,b]$; $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_n = b$ une subdivision ;
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\xi_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$.
$S(f,\sigma,\xi) := \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - \sigma_{i-1}) f(\xi_i)$; pas de σ : $|\sigma| = \sup_{1\leq i\leq n} |\sigma_i - \sigma_{i-1}|$.

Thm 20:
Soit f continue sur $[a,b]$.
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall \sigma$ subdivision de $[a,b]$, $\forall \xi$,
$|\sigma| < \alpha \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi) \right| < \varepsilon$.
En particulier, $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ex 21: $I(\rho) := \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\,d\theta = \lim_{n\to\infty} u_n$, ([GOU], p. 179)
avec $u_n = \frac{\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2\rho\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \rho^2\right)\right)$ et où $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{-1,+1\}$.

3 Régularité des intégrales à paramètre ([GOU], p. 157, 164)

Thm 22:
Si $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux,
Si $f(\cdot,t)$ est continue,
Et si $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable continue par morceaux
Alors $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est continue.

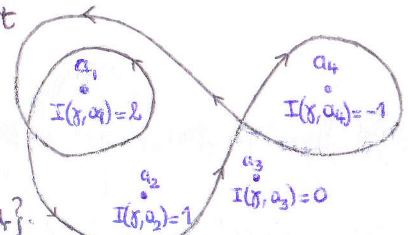
Thm 23:
Si $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable,
Et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie les hypothèses du thm 22,
Alors $\Phi : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est C^1,
Et $\Phi'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

Ex 24: $I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,dt$ est C^1
$I'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $I(x) = I(0) + \arctan x = \arctan x$

Ex 25: Transformée de Fourier de la gaussienne
On cherche $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2}\,dx$.
$\hat{f}$ est C^1 et $\hat{f}'(t) = -\frac{t}{2}\hat{f}(t)$
Donc $\hat{f}(t) = \hat{f}(0)\exp(-t^2/4) = \sqrt{\pi}\exp(-t^2/4)$.

4 Analyse complexe ([OA], p. 67)

Déf 26: Indice d'un point p par rapport à un lacet γ ne passant pas par p :
$I(\gamma,p) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-p}$.

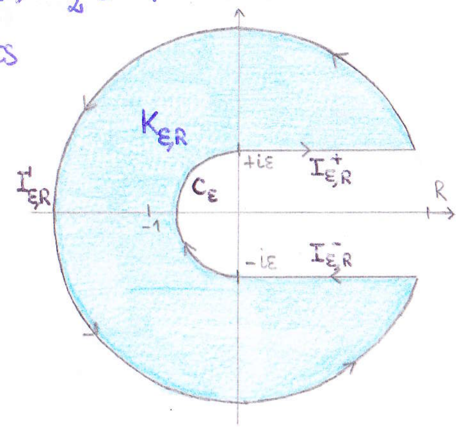


Thm 27: Théorème des résidus
Soit f holomorphe sur $\mathcal{V} = \mathcal{U} \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$.
Soit γ un chemin continu fermé dans $\mathcal{V}$ tel que $I(\gamma,z) = 0$ pour tout $z \notin \mathcal{U}$;
On a : $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{r} I(\gamma,a_i)\,\mathrm{Res}(f,a_i)$.

Ex 28: On cherche $I(\alpha) := \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2}\,dt$ ([AM], p. 248-249)
Pour $\alpha > 0$, on a : $I(\alpha) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2}\,dt \right)$
On intègre $z \mapsto \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}$ le long du demi-cercle supérieur centré en O, de rayon R.
Le thm des résidus donne : $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$.

App 29: Formule des compléments
On a : pour $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$,
$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

↑ DÉVELOPPEMENT N°2
([AM], p. 249)



III CALCUL APPROCHÉ D'INTÉGRALES

1 Méthodes des rectangles

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue ; $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b$.
Motivation : Chasles $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx$.

On parle de méthode des rectangles :

* à gauche : $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1}-\alpha_i) f(\alpha_i)$
* à droite : $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1}-\alpha_i) f(\alpha_{i+1})$

Dans le cas où les variations de f sont connues, ces méthodes donnent un encadrement de $\int_a^b f(x)\,dx$.

On parle aussi de méthode du point milieu :
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1}-\alpha_i) f\left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}\right).$$

2 Méthode de quadrature de Gauss ([ROM], p.338-346)

Soit π une fonction poids sur $]a,b[$, on cherche $(\lambda_{n,k})$ et $(x_{n,k})$ tels que :
$\forall n \geq 1$, $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_a^b P(x)\pi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} P(x_{n,k})$.

On note (P_n) la suite de polynômes orthogonaux associés à π, avec $\deg P_n = n$. On note $P_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x^k$, et $\alpha_n^{(n)} > 0$.

Lem 30 :
De tels coefficients $(\lambda_{n,k})_k$ existent $\Leftrightarrow$ les $(x_{n,k})_k$ sont les n racines du polynôme P_n.
Dans ce cas, on a de plus unicité.

On peut alors approximer :
$$\int_a^b f(x)\pi(x)\,dx \simeq \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}).$$

On peut majorer l'erreur :
$$|E_n(f)| = \left|\int_a^b f(x)\pi(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k})\right| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)!\,(\alpha_n^{(n)})^2}$$

3 Méthode de Monte-Carlo ([PT], p.78)

On veut calculer $I = \int f(x)g(x)\,dx$ où $f \geq 0$ et $\int f(x)\,dx = 1$.
Si Y est une va de densité f, on a : $\mathbb{E}[g(Y)] = I$.
Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des vaiid de même loi que Y.

On a : $I \simeq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(Y_i)$.

En effet, si $Y \in L^2$, on a :
$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(Y_i) - \mathbb{E}[g(Y)]\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(g(Y_i) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(Y_k)\right)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$
Estimateur de $\sqrt{Var(g(Y))}$ noté Σ_n

Ceci permet de déduire un intervalle de confiance asymptotique :
Pour n « assez grand », on a :
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(Y_i) - \mathbb{E}[g(Y)]\right| \leq \frac{1{,}96\,\Sigma_n}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0{,}95$$

[GOU] : Gourdon, Analyse (2e édition)
[BP] : Briane Pagès, Théorie de l'intégration (3e édition)
[OA] : Beck Malick Peyré, Objectif Agrégation (2e édition)
[AM] : Amar Matheron, Analyse Complexe
[ROM] : Rombaldi, Interpolation & Approximation
[PT] : Paul S. Toulouse, Thèmes de probabilités et statistique