249 — SUITE DE VARIABLES DE BERNOULLI INDÉPENDANTES

Cadre : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Déf 1 : Soit X une va réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $p \in [0,1]$.
On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X \sim b(p)$
$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = p$.

Ex 2 :
- Pour une pièce équilibrée, le pile ou face $\sim b(1/2)$.
- Si $A \in \mathcal{A}$, et $\mathbb{P}(A) = p$, alors $\mathbb{1}_A \sim b(p)$.
- Toute expérience à deux états (réussite/échec) suit une loi de Bernoulli.

Si $X \sim b(p)$, alors : $\mathbb{E}[X] = p$; $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$
Fonction génératrice : $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = 1-p+pt$
Fonction caractéristique : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = 1-p+pe^{it}$

I SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

1 Indépendance ([BL], p. 77-80)

Déf 3 :
Une famille quelconque d'événements $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ est mutuellement indépendante $\Leftrightarrow \forall J \subset I$ fini, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$.

Ex 4 :
On lance deux dés D_1 et D_2 simultanément.
Soient $A = \{D_1 \text{ donne } 6\}$, $B = \{D_2 \text{ donne } 1\}$.
Alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$ donc A et B sont indépendants.
Ainsi la réalisation de A n'influence pas la réalisation de B.

Cex 5 :
Soit $C = \{D_1 + D_2 \text{ donne } 7\}$
Alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ car $\mathbb{P}(C) < 1$.

Rq 6 : Ceci illustre le fait que l'indépendance 2 à 2 n'implique pas la mutuelle indépendance : $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$.

Ex 7 : On suppose ici $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n := \bigcup_{1 \leq k \leq 2^{n-1}} \left]\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}\right]$.
La famille $(A_n)_{n \geq 1}$ est mutuellement indépendante.

Déf 8 :
Une famille quelconque de sous-tribus $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$, $i \in I$ est mutuellement indépendante $\Leftrightarrow$ toute famille d'événements $A_i \in \mathcal{A}_i$ est mutuellement indépendante.

Déf 9 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de va de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(E, \mathcal{B})$.
La famille $(X_i)_{i \in I}$ est dite (mutuellement) indépendante
$\Leftrightarrow$ les tribus engendrées $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.
$\Leftrightarrow \forall J \subset I$ fini, $\forall (B_j)_{j \in J} \in \mathcal{B}^J$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in B_j\}\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \in B_j)$.

Ex 10 : Reprenons l'exemple 7.
La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n \geq 1}$ est une suite de vaiid de loi $b(1/2)$.

2 Construction de suites de va indépendantes ([Ouv2], p. 53-59)

Déf 11 : Développement dyadique
Soit $x \in [0,1[$; on définit $(D_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ par $R_0(x) = x$
et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} D_n(x) = \lfloor 2R_{n-1}(x) \rfloor \\ R_n(x) = 2R_{n-1}(x) - D_n(x) \end{cases}$.
$(D_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est le développement dyadique de x.

Prop 12 : Si $x \in [0,1[$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(x)}{2^n}$

Rq 13 : Ainsi défini, le développement dyadique n'est pas unique.
En effet, $\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j}$; de façon générale, les seuls cas de non-unicité sont les rationnels dyadiques : $\frac{p}{2^q}$.
On choisit alors le développement dyadique fini pour régler ce problème.

Prop 14 : Ici, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$.
$(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de vaiid de loi $b(1/2)$.
De plus $X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{2^n}$ suit la loi uniforme sur $[0,1[$.

Lemme 15 :
Soit $(N_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une partition de $\mathbb{N}^*$ en sous-ensembles infinis : $\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}^*} N_j$.
Écrivons $j_1 < \ldots < j_k < \ldots$ les éléments de N_j.
On pose, pour $j \in \mathbb{N}^*$: $Y_j := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{j_k}}{2^k}$.
Alors, la suite $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est constituée de vaiid de loi uniforme sur $[0,1[$.

Thm 16 :
Soit $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de lois sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
On note F_j leurs fonctions de répartition et G_j les pseudo-inverses, définies par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_j(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_j(x) \geq t\}$.
On note alors : $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $X_j = G_j(Y_j)$ et $X_j \sim \mu_j$.
On vient ainsi de construire une suite $(X_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de va indépendantes, de lois $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ données.

II LOIS ASSOCIÉES AUX SUITES DE V.A. DE BERNOULLI

1 Loi de Rademacher

Déf 17:
X suit la loi de Rademacher $\Leftrightarrow \mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=1/2$.
Alors on a: $\mathbb{E}[X]=0$ et $\mathbb{V}ar(X)=1$.

Prop 18:
Si $X \sim b(1/2)$, alors $2X-1$ suit la loi de Rademacher.

2 Loi binomiale

Déf 19:
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, où $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in[0,1]$
$\Leftrightarrow \forall k\in[\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
Alors on a: $\mathbb{E}[X]=np$ et $\mathbb{V}ar(X)=np(1-p)$.

Prop 20:
Soient $X_1,\dots,X_n$ des vaiid de loi $b(p)$.
Alors $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Illu 21:
On lance n fois une pièce équilibrée.
La probabilité d'obtenir k fois pile est $\mathbb{P}(S_n=k)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3 Loi géométrique

Déf 22:
X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p\in[0,1]$
$\Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$
Alors on a: $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}ar(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

Prop 23:
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vaiid $b(p)$.
Alors $T=\inf\{n\in\mathbb{N}^* \mid X_n=1\}$ suit la loi $\mathcal{G}(p)$.

Illu 24:
À chaque fois qu'on essaie de la démarrer, une vieille voiture a une probabilité $p\in[0,1]$ de démarrer.
Alors la probabilité de démarrer à la $k^{\text{ème}}$ tentative est $\mathbb{P}(T=k)=p(1-p)^{k-1}$.

4 Loi de Poisson

Déf 25:
X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda>0 \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
Alors on a: $\mathbb{E}[X]=\lambda$ et $\mathbb{V}ar(X)=\lambda$.

Thm 26: Théorème de Poisson ([Ouv1], p. 226)
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de va (non-nécessairement indépendantes) de lois $\mathcal{B}(n,p_n)$. On suppose : $\lim_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$.
Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Thm 27: Théorème des évènements rares ([Ouv2], p. 321-322)
Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une famille finie $\{A_{n,j} \mid 1\leq j\leq M_n\}$ d'évènements indépendants.
On pose $p_{n,j}:=\mathbb{P}(A_{n,j})$ et $S_n:=\sum_{j=1}^{M_n}\mathbb{1}_{A_{n,j}}$.
On suppose : • $(M_n)_n$ est croissante
• $\lim_{n\to\infty} M_n=+\infty$
• $\max_{1\leq j\leq M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
• $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda>0$.
Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

DÉVELOPPEMENT N°1

Illu 28:
On considère une banque ayant N clients "indépendants".
On pose: $A_i=\{$le client n°i vient à la banque aujourd'hui$\}$.
On note $Z=\sum_{i=1}^{N}\mathbb{1}_{A_i}$, le nombre de clients venant aujourd'hui.
Pour N "grand" et $\mathbb{P}(A)$ "petit", Z a une loi "proche" d'une loi de Poisson

III APPLICATIONS

1 À l'aide des théorèmes de convergence

Thm 29: Loi forte des grands nombres ([BL], p. 140)
Soit $(X_n)_n$ une suite de vaiid, intégrables; $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.
Alors on a: $\frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{p.s.}\mathbb{E}[X_1]$.

Thm 30: Théorème central limite ([BL], p. 145)
Soit $(X_n)_n$ une suite de vaiid, de carré intégrable; $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.
Alors on a: $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X_1)}}\left(\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}[X_1]\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1)$.

App 31: ([BL], p. 145)

Supposons qu'on dispose d'une pièce truquée, donnant pile avec probabilité p, qu'on veut estimer.

On note $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$, $A_i := \{\text{le } i^e \text{ lancer fait pile}\}$. Ainsi $X_i \sim b(p)$.

Par le TCL, $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Par la LGN, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} p$ (la convergence p.s. implique la convergence en probabilité).

Donc, d'après le lemme de Slutsky : $\frac{S_n - np}{\sqrt{n \frac{S_n}{n}(1-\frac{S_n}{n})}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

Ainsi, pour $a<b$: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{S_n}{n}(1-\frac{S_n}{n})}} \leq b\right) = \int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$.

Ceci fournit l'intervalle de confiance asymptotique :

$$\left[\frac{S_n}{n} - \frac{b}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1-\frac{S_n}{n}\right)},\ \frac{S_n}{n} - \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{S_n}{n}\left(1-\frac{S_n}{n}\right)}\right],$$

contenant p avec une proba "proche" de $\int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$, pour n "grand".

2 Théorème de Weierstrass ([ZQ], thm XIII.II.3)

Thm 32: DVPT N°2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et ω son module de continuité, ie $\omega(h) = \sup\{|f(u) - f(v)| \mid |u-v| \leq h\}$. Pour $n \geq 1$, on considère $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ le n^e polynôme de Bernstein de f. Alors :

1) B_n converge vers f sur $[0,1]$ uniformément.

2) Plus précisément, on a : $\|f - B_n\|_\infty \leq C\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où $C \in \mathbb{R}$.

3) On a optimalité pour 2) : il existe f lipschitzienne où $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, où $\delta \in \mathbb{R}$

DVPT N°2

3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Déf 33: ([BL], p. 204)

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va iid de loi $b(p)$, où $p \in [0,1]$.

On définit alors pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = 2Y_n - 1$ et $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$.

On dit alors que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, issue de zéro. Si $p = \frac{1}{2}$, on dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est symétrique.

Prop 34: ([BL], p. 222)

On pose $T = \inf\{n>0 \mid S_n = 0\}$, le temps de retour en zéro.

On a : $\mathbb{P}(T<\infty) = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : la marche aléatoire revient p.s. en zéro, ssi $p = \frac{1}{2}$.

4 Ruine du joueur ([Ouv2], p. 394 - 398)

Un joueur joue à pile ou face ; on note p la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet.

À chaque lancer :

→ S'il fait pile, il reçoit un euro de la banque.

→ S'il fait face, il donne un euro à la banque.

Au départ, le joueur possède a € et la banque b €.

Le jeu ne s'arrête que lorsque le joueur ou la banque est ruiné.

On modélise ceci par une suite $(Y_i)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1} = 2b(p) - 1$, et si le jeu n'est pas encore arrêté, $S_n = a + \sum_{i=1}^{n} Y_i$ symbolise la fortune du joueur après n lancers.

On note $T = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \in \{0, a+b\}\}$

On se pose 3 questions :

- quelle est la probabilité $\mathbb{P}(T<\infty)$ que le jeu s'arrête ?
- quelle est la probabilité $\rho = \mathbb{P}(S_T = a+b)$ que le joueur gagne ?
- quel est le temps moyen $\mathbb{E}[T]$ d'arrêt du jeu ?

Thm 35:

On a toujours $\mathbb{P}(T<\infty) = 1$.

Puis :

⊛ Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $\rho = \frac{1 - (q/p)^a}{1 - (q/p)^{a+b}}$ (on note $q = 1-p$)

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{p-q}\left(\frac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^{a+b}} - a\right)$$

⊛ Soit $p = \frac{1}{2}$ et $\rho = \frac{a}{a+b}$

$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

Références :

[BL] : Ph. Barbe, M. Ledoux, Probabilité

[Ouv1] : Jean-Yves Ouvrard, Probabilités 1

[Ouv2] : Jean-Yves Ouvrard, Probabilités 2

[ZQ] : Hervé Queffélec & Claude Zuily, Analyse pour l'agrégation, 4e éd.