

# Le théorème de *Lickorish* et *Wallace*

Stage de fin de L3 sous la direction de Vincent Colin, Université de Nantes

Florian Lemonnier, ENS Cachan – Antenne de Bretagne

Mai-Juin 2013

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Explication de l'énoncé</b>	<b>3</b>
1.1	Notations et rappels . . . . .	3
1.2	Des noeuds et des entrelacs . . . . .	3
1.3	Notion de variété . . . . .	4
1.4	Chirurgies . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Démonstration du théorème</b>	<b>9</b>
2.1	Corps en anses . . . . .	9
2.2	Homéomorphisme de torsion . . . . .	10
2.3	Fonctions de <i>Morse</i> et scindements de <i>Heegaard</i> . . . . .	10
2.4	Quelques lemmes utiles . . . . .	15
2.5	Corps de la démonstration . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Un corollaire</b>	<b>19</b>

## Introduction

L'objet de ce rapport de stage est l'étude du théorème suivant :

### **Théorème de *Lickorish* et *Wallace***

Toute variété close, orientable et connexe de dimension 3 est obtenue par chirurgie de *Dehn* sur un entrelacs de la sphère  $S^3$ .

De plus, on peut trouver une chirurgie dont les coefficients sont tous  $\pm 1$ .

Ce théorème a été démontré une première fois par *Andrew H. Wallace* en 1960, puis, en 1962, de façon indépendante, par *William B. R. Lickorish* (la démonstration présentée ici reprend le schéma de cette seconde preuve).

Dans un premier temps, on expliquera les termes de son énoncé, et les notions importantes qui y sont associées.

Dans un second temps, on en fera la démonstration, qui, elle, fait appel à d'autres notions et d'autres résultats qu'on démontrera ou qu'on expliquera quand les démonstrations sont trop longues (ou présentes dans d'autres travaux qu'il est facile de se procurer).

Puis, la troisième partie traitera d'un corollaire utile de ce théorème :

### **Corollaire du théorème de *Lickorish* et *Wallace***

Toute 3-variété close, orientable, et connexe est le bord d'une 4-variété orientable et même simplement connexe.

Il est à noter qu'il s'agit là d'une propriété intéressante qui n'est pas vraie en dimension quelconque.

# 1 Explication de l'énoncé

## 1.1 Notations et rappels

On opétera dans ce rapport pour les notations suivantes :

1.  $\mathcal{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$
2.  $\mathcal{S}^{n-1} = \partial\mathcal{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

On rappelle qu'un homéomorphisme entre deux espaces topologiques est une application continue bijective, et dont la réciproque est aussi continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes.

De façon plus visuelle, deux objets sont homéomorphes, ou topologiquement équivalents, si l'un peut devenir l'autre en se déformant continûment par étirement, plissement et compression, sans déchirure, ni collage, ni pli marqué.

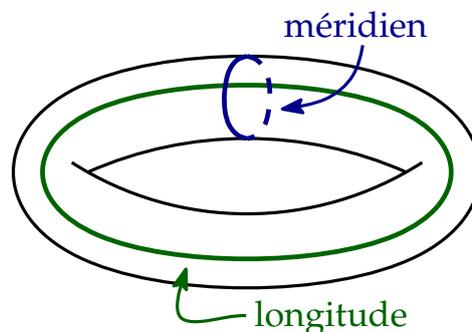


FIGURE 1 – On peut repérer un point sur le tore en connaissant la longitude et le méridien auxquels il appartient.

### Définition 1 Homotopies et Isotopies

Soient  $f_0$  et  $f_1$  deux applications continues d'un espace  $X$  dans un espace  $Y$ .

On dit que  $f_0$  est homotope à  $f_1$ , s'il existe une application continue  $F : X \times [0; 1] \rightarrow Y$ , telle que  $F(\bullet, 0) = f_0$  et  $F(\bullet, 1) = f_1$ .

Pour tout  $t \in [0; 1]$ , on considère alors

$$f_t : \begin{cases} X & \rightarrow Y \\ x & \mapsto F(x, t) \end{cases}$$

et on dit que  $F$  (ou  $f_t$ ) est une homotopie de  $f_0$  à  $f_1$ .

On parle d'isotopie, si de plus, pour tout  $t \in [0; 1]$ ,  $f_t$  est un homéomorphisme (c'est-à-dire que  $f_t$  est en plus d'être continu, inversible d'inverse continu).

## 1.2 Des noeuds et des entrelacs

### Définition 2 Noeuds et Entrelacs

Une partie  $K$  d'un espace  $X$  est un noeud si  $K$  est homéomorphe à une sphère  $S^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).

De façon plus générale,  $K$  est un entrelacs si  $K$  est homéomorphe à une union disjointe d'une ou plusieurs sphères  $S^{p_1} \cup \dots \cup S^{p_r}$ .

Souvent, on considère les noeuds et les entrelacs dans  $\mathbb{R}^3$  et on les projette dans  $\mathbb{R}^2$  afin de les représenter.

Cette projection est génériquement régulière, c'est-à-dire injective presque partout, à l'exception d'un nombre fini de points de croisements simples, où la projection envoie seulement 2 points de l'entrelacs au même endroit. De plus, les directions à ces deux points ne sont pas colinéaires si bien que les brins projetés pointent dans deux directions différentes du plan.

Dans ces conditions, on indique quel brin est dessus et quel brin est dessous en interrompant le dessin.

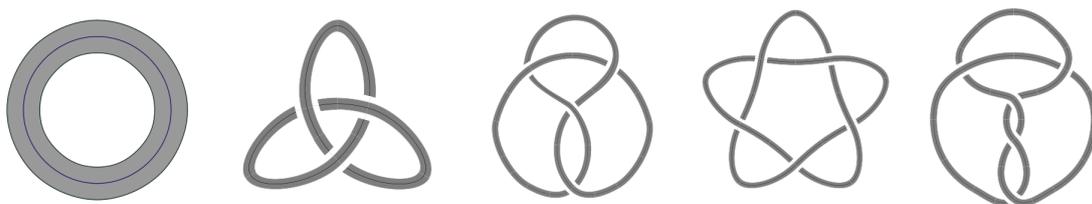


FIGURE 2 – Noeuds ayant moins de 5 croisements de  $\mathbb{R}^3$  projetés régulièrement dans  $\mathbb{R}^2$ . À gauche, le noeud trivial ; le deuxième noeud est appelé noeud de trèfle.

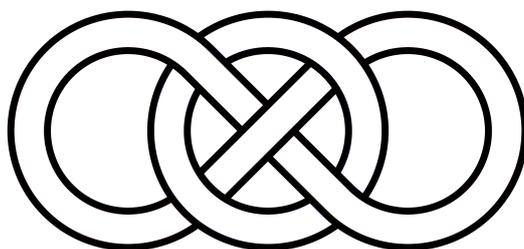


FIGURE 3 – Entrelacs de *Whitehead*. Il est obtenu à partir de deux noeuds triviaux.

### 1.3 Notion de variété

#### Définition 3 Variété (topologique)

On dit que  $M$  est une  $n$ -variété (topologique), si  $M$  est un espace métrique qui puisse être recouvert par des ouverts homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ .

De façon plus précise, on peut définir sur  $M$  un atlas qui est un ensemble de couples  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tel que :

1.  $\forall i \in I, U_i$  est un ouvert de  $M$  et  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme ;
2.  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  ;
3.  $\forall i, j \in I, \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  est un homéomorphisme.

Le couple  $(U_i, \varphi_i)$  est une carte de l'atlas.

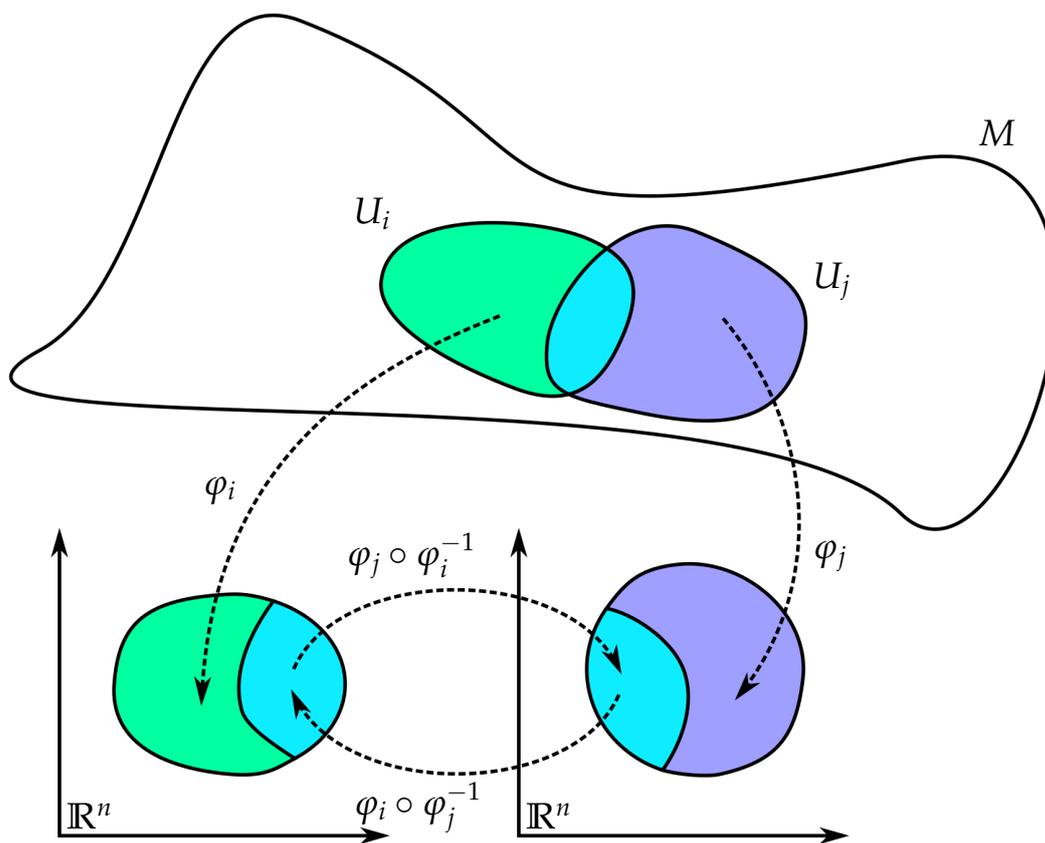


FIGURE 4 – Une variété et deux de ses cartes.

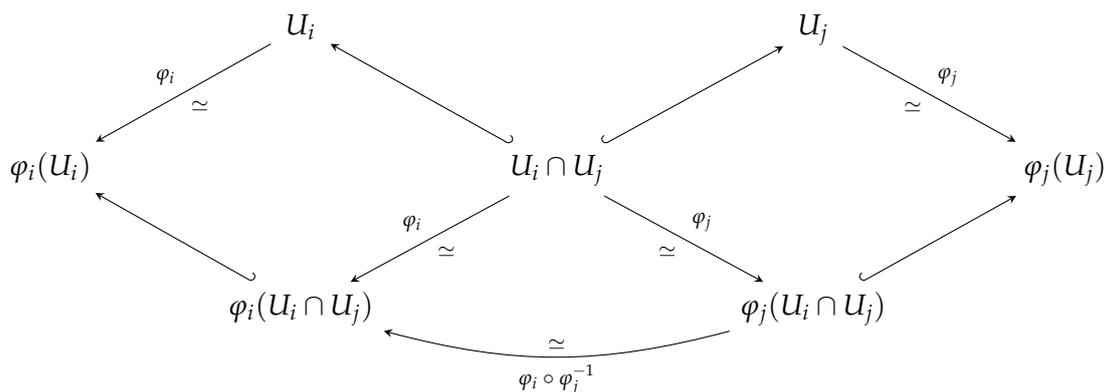


FIGURE 5 – Diagramme commutatif associé à une variété.

#### Définition 4 Régularité d'une variété

Lorsque toutes les applications  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  (changements de carte) sont de classe  $\mathcal{C}^p$ , avec  $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , on dit que la variété est de classe  $\mathcal{C}^p$ .

#### Définition 5 Régularité d'une fonction d'une variété dans une autre

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés de classe  $\mathcal{C}^k$ , et  $j < k$ .

$f : M \rightarrow N$  est de classe  $\mathcal{C}^j$ , si, pour tout point  $m \in M$ , on peut trouver une carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$  centrée en  $m$ , et une carte locale  $(V, \psi)$  de  $N$  centrée en  $n = f(m)$ , telles que :

$$f_{\varphi, \psi} : \begin{cases} \varphi(U) & \rightarrow & \psi(V) \\ x & \mapsto & (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) \end{cases} \text{ est bien définie et de classe } \mathcal{C}^j.$$

Soit  $M$  une  $n$ -variété.

Étant donnée une orientation de  $\mathbb{R}^n$ , chaque carte permet d'orienter le morceau de la variété qu'il décrit. Toutefois, pour la variété prise globalement, il n'y a pas de raison pour que les graphes se recouvrant voient leur orientation s'accorder.

Les variétés, telles que la sphère, où les différents graphes peuvent être choisis pour que les régions se recouvrant s'accordent sur leur orientation, sont appelées variétés orientables.

### Proposition 1 Orientabilité en basses dimensions

En dimension 2, une variété est orientable si, et seulement si, elle ne contient pas de bande de Möbius.

En dimension 3, une variété est orientable si, et seulement si, elle ne contient pas le produit d'une bande de Möbius et d'un intervalle (bande de Möbius épaissie).

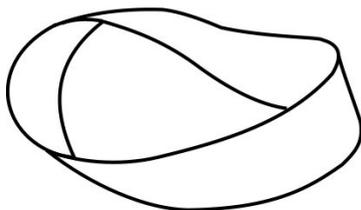


FIGURE 6 – Ruban (ou bande) de Möbius.

On dira d'une variété qu'elle est close, si elle est compacte et sans bord.

### Définition 6 Espace tangent

Soit  $M$  une  $n$ -variété de classe  $C^\infty$  ( $C^1$  suffit) et soit  $x \in M$ ,  $(U, \varphi)$  une carte locale de  $M$  en  $x$ .

Deux courbes  $\gamma_1, \gamma_2 : ]-1; 1[ \rightarrow M$ , telles que  $\varphi \circ \gamma_1$  et  $\varphi \circ \gamma_2$  soient différentiables en 0, sont dites tangentes en  $x$  si

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x \text{ et } (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

On peut montrer qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence ; son ensemble des classes est appelé espace tangent de  $M$  en  $x$ , et noté  $T_x M$ .

L'espace tangent a aussi la structure d'espace vectoriel.

### Définition 7

Soit  $g : M \rightarrow N$  une fonction  $C^\infty$  avec  $g(x) = y$ .

On note  $g_* : T_x M \rightarrow T_y N$  l'application linéaire induite.

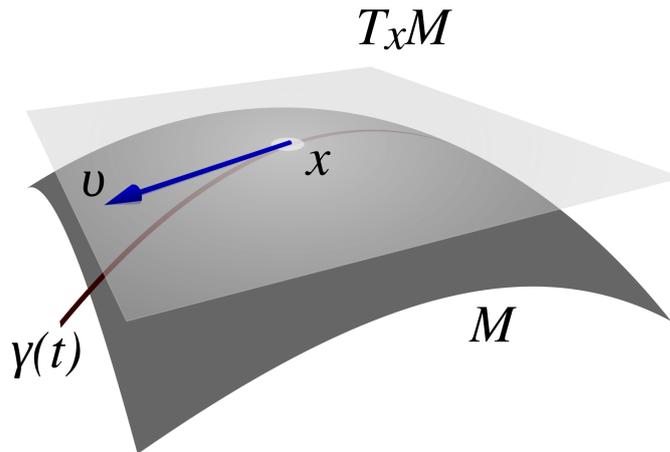


FIGURE 7 – Espace tangent.

## 1.4 Chirurgies

### Définition 8 Chirurgie sur les 3-variétés

On a besoin :

1. d'une 3-variété  $M$ , avec ou sans bord ;
2. d'un entrelacs  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$  composé de chemins simples fermés dans  $\overset{\circ}{M}$  ;
3. de voisinages tubulaires (tores solides), clos et disjoints  $N_i$  pour chaque  $L_i$  dans  $\overset{\circ}{M}$  ;
4. d'un chemin simple fermé  $J_i$  dans chaque  $\partial N_i$ .

On peut alors construire la 3-variété

$$M' = (M \setminus (\overset{\circ}{N}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{N}_n)) \cup_h (N_1 \cup \dots \cup N_n),$$

où  $h$  est "l'union" des homéomorphismes  $h_i : \partial N_i \rightarrow \partial N_i$  qui transforment un certain méridien de  $N_i$  en  $J_i$ .

C'est la variété obtenue en enlevant les voisinages tubulaires des composantes de l'entrelacs  $L$  et en recollant  $n$  tores solides en identifiant leurs bords respectifs aux bords des voisinages tubulaires  $N_i$  suivant l'homéomorphisme  $h$ .

La 3-variété  $M'$  est alors appelée résultat d'une chirurgie de *Dehn* sur  $M$  le long de l'entrelacs  $L$  avec les instructions de chirurgie 3. et 4..

### Définition 9 Nombre d'enlacement

Soient  $J$  et  $K$  deux noeuds orientés disjoints dans  $\mathcal{S}^3$  ou  $\mathbb{R}^3$ . On considère une projection régulière de  $J \cup K$ .

En chaque point où  $J$  croise  $K$  en passant en-dessous, on compte comme sur la figure ci-dessous.

Quand on en fait la somme, on obtient le nombre d'enlacement de  $J$  avec  $K$ , noté  $\text{lk}(J, K)$  (*linking number*).

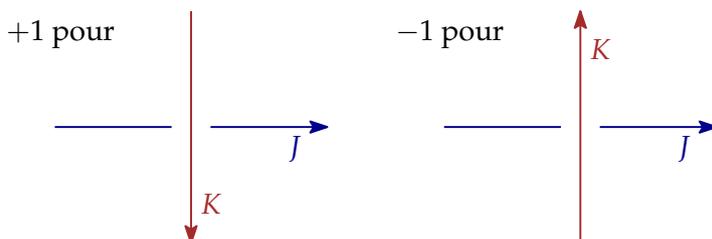


FIGURE 8 – Comptage du nombre d'enlacement.

Chaque composante  $L_i$  d'un entrelacs orienté  $L$  dans  $\mathbb{R}^3$  a une présentation préférée pour un voisinage tubulaire  $N_i$  dans lequel la longitude  $\lambda_i$  est orientée de la même façon que  $L_i$  et le méridien  $\mu_i$  a  $\pm 1$  pour nombre d'enlacement avec  $L_i$ .

On écrit ensuite la courbe  $J_i$  dans la base  $(\lambda_i, \mu_i)$  :  $J_i = a_i\lambda_i + b_i\mu_i$ .

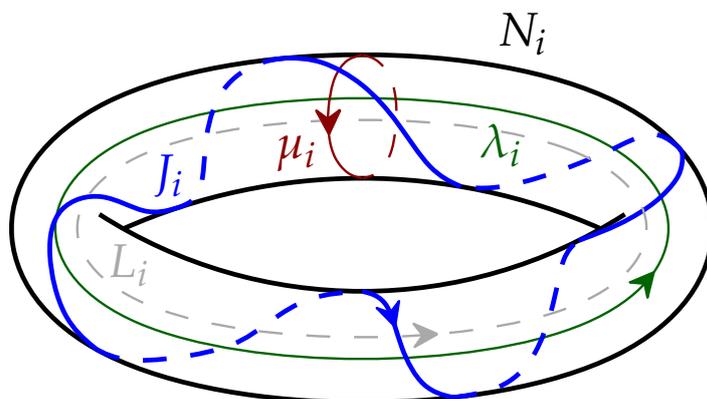


FIGURE 9 – Un exemple. Ici :  $J_i = \lambda_i + 4\mu_i$ . Et on a bien :  $\text{lk}(L_i, \mu_i) = 1$ .

Il y a une ambiguïté sur le signe de  $a_i$  et de  $b_i$  selon l'orientation de  $J_i$  qu'on choisit. On lève cette ambiguïté en considérant le rapport  $r_i = \frac{b_i}{a_i}$  ; si  $a_i = 0$ , on écrit  $r_i = \infty$ .

On appelle  $r_i$  le coefficient de chirurgie associé à la composante  $L_i$ .

On aura besoin de fixer l'orientation de  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathcal{S}^3$ ) dans la suite : on opte dès maintenant

pour la règle des trois doigts.

En remarquant que la donnée 3. est inutile (il suffit de considérer qu'il y a un unique voisinage tubulaire autour de chaque  $L_i$ ), on peut définir une chirurgie sur  $S^3$  à partir d'un entrelacs  $L$  et de nombres rationnels associés à ses composantes.

On définit alors la notion de chirurgie entière : une chirurgie sur un entrelacs  $L$  est dite entière, si, et seulement si, tous les rationnels associés aux composantes de  $L$  sont entiers.

## 2 Démonstration du théorème

### 2.1 Corps en anses

#### Définition 10 $\lambda$ -anse

Soit  $M$  une  $n$ -variété,  $\lambda \leq n$ .

On appelle  $\lambda$ -anse une copie de  $\mathcal{D}^\lambda \times \mathcal{D}^{n-\lambda}$ .

Par exemple, en dimension 3, une 1-anse est de la forme  $\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^1 = \mathcal{D}^2 \times [-1; +1]$ .

#### Définition 11 Corps en anses

Un corps en anses est un espace obtenu à partir de la boule  $\mathcal{D}^3$  (qui n'a pas d'anse) en y attachant  $g$  copies distinctes de  $\mathcal{D}^2 \times [-1; +1]$  (les 1-anses) par des homéomorphismes qui envoient les  $2g$  disques  $\mathcal{D}^2 \times \pm 1$  sur  $2g$  disques disjoints de  $\partial\mathcal{D}^3 = S^2$ , de telle sorte que la 3-variété obtenue soit orientable.

L'entier  $g$  est alors appelé genre du corps en anses ainsi construit.

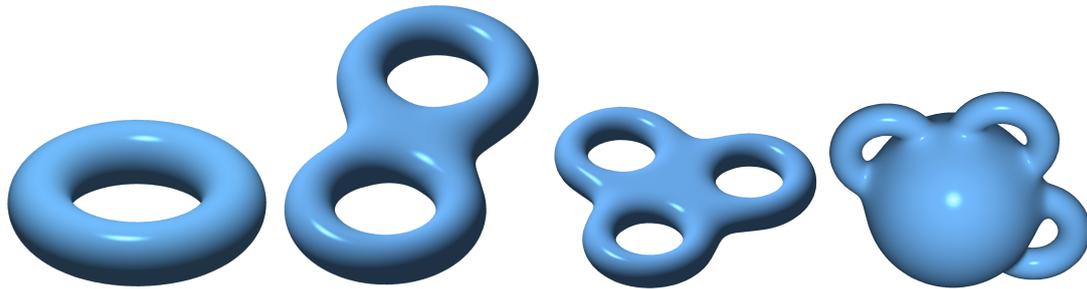


FIGURE 10 – Des corps en anses de différents genres. La sphère, non représentée, est de genre 0. À gauche, le tore, est un corps en anse de genre 1 ; le double-tore est de genre 2 et le triple-tore de genre 3. La sphère à trois anses (à droite) est elle aussi de genre 3 ; en fait, elle est homéomorphe au triple-tore.

#### Proposition 2 Corps en anses homéomorphes

Deux corps en anses sont homéomorphes si, et seulement si, ils sont de même genre.

#### Démonstration 2

On ne fera pas ici une démonstration formelle de cette proposition.

Cependant, il est intéressant de comprendre que des opérations telles que changer la taille d'une sphère, changer la taille d'une anse ou faire glisser une anse sur la sphère peuvent se traduire par des homéomorphismes. La proposition découle alors de ces constatations.

### Lemme 3 Classification des surfaces closes, orientables et connexes

Une surface close, orientable et connexe est :

- soit homéomorphe à  $S^2$ , et dans ce cas, elle est le bord de  $\mathcal{D}^3$ , corps en anses de genre 0 ;
- soit homéomorphe à la somme connexe de  $g$  tores  $\mathcal{T}^2$ , avec  $g \in \mathbb{N}^*$ , et alors elle est le bord d'un corps en anses de genre  $g$ .

## 2.2 Homéomorphisme de torsion

### Définition 12 Homéomorphisme de torsion

On considère une courbe  $J$  située à l'intérieur d'une surface.

On construit un voisinage en anneau  $A$  autour de  $J$  ;  $A$  est en fait un anneau dont l'âme est  $J$ .

On définit alors l'homéomorphisme de torsion autour de  $J$  dans le voisinage  $A$  comme :

- étant l'identité sur le complémentaire de  $A$  ;
- répondant au schéma ci-dessous à l'intérieur de  $A$ .

Il faut noter qu'il existe une formule décrivant rigoureusement l'homéomorphisme de torsion ci-dessous, et qu'on peut choisir l'un ou l'autre des sens pour effectuer la torsion.

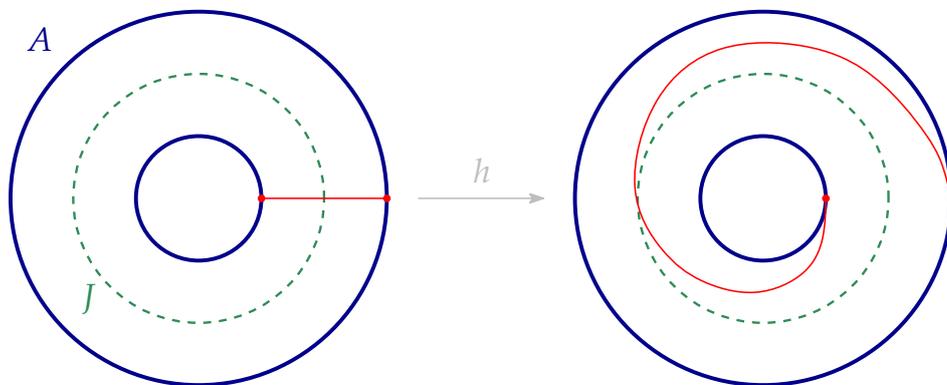


FIGURE 11 – L'homéomorphisme de torsion agissant sur les points du segment rouge à l'intérieur de l'anneau  $A$  voisinage de  $J$ .

## 2.3 Fonctions de Morse et scindements de Heegaard

### Définition 13 Point critique, Valeur critique, Valeur régulière

Soit  $M$  une  $n$ -variété de classe  $C^\infty$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$ .

$p \in M$  est appelé point critique de  $f$ , si  $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$  est identiquement nulle.

En d'autres termes, cela signifie que si on prend un système local de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  dans un voisinage  $U$  de  $p$ , on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0.$$

$f(p)$  est alors appelé valeur critique de  $f$ .

Si  $y$  n'est pas une valeur critique (elle ne possède pas d'antécédent qui soit un point critique), alors c'est une valeur régulière (même si elle n'est pas dans l'image de  $f$ ).

### Définition 14 Dégénérescence

Soit  $M$  une  $n$ -variété de classe  $C^\infty$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$  et  $p$  un point critique de  $f$ .

Le point  $p$  est dit non-dégénéré si  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)$  est de déterminant non-nul.

$f_{**}$  est la Hessienne de  $f$  au point critique  $p$ ; elle est bilinéaire symétrique sur  $T_p M$ .

### Définition 15 Fonction de Morse

Soit  $M$  une  $n$ -variété de classe suffisante, et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ .

$f$  est une fonction de Morse, si ses points critiques sont non-dégénérés.

### Définition 16 Indice

L'indice d'une application bilinéaire  $H$  sur un espace vectoriel  $V$ , est la dimension maximale d'un sous-espace de  $V$  sur lequel  $H$  est définie négative.

Par abus, on appellera indice de  $f$  en  $p$ , l'indice de  $f_{**}$  sur  $T_p M$ .

**Définition 17 Fonction de Morse auto-indexée**

Une fonction de Morse  $f$  est dite auto-indexée si les points critiques d'indice  $i$  de  $f$  sont dans  $f^{-1}(i)$ .

**Théorème 4 Existence d'une fonction de Morse auto-indexée**

Soit  $M$  une  $n$ -variété compacte.

Alors il existe une fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , auto-indexée.

**Démonstration 4**

On ne démontrera pas ce résultat important ici qui fait partie de la théorie de Morse. Il est possible d'en trouver une démonstration rigoureuse dans l'article d'Emmanuel Militon présent en bibliographie et disponible sur Internet.

Sauf mention contraire, on notera, pour  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$M^a = f^{-1}(] - \infty; a]) = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$$

la variété de sous-niveau  $a$ .

**Théorème 5 Points critiques et Homotopie (1)**

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , où  $M$  est une  $n$ -variété.

Soit  $a < b$ , on suppose que  $f^{-1}([a; b])$  est compact, et qu'il ne contient pas de points critiques de  $f$ .

Alors  $M^a$  et  $M^b$  sont homéomorphes.

**Théorème 6 Points critiques et Homotopie (2)**

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , où  $M$  est une  $n$ -variété, et soit  $p$  un point critique non-dégénéré d'indice  $\lambda$ .

On pose  $f(p) = c$ , et on suppose que  $f^{-1}([c - \varepsilon; c + \varepsilon])$  est compact et ne contient pas d'autre point critique de  $f$  que  $p$ , pour un  $\varepsilon > 0$  bien choisi.

Alors pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit,  $M^{c+\varepsilon}$  est homéomorphe à  $M^{c-\varepsilon}$  à qui on a attaché une  $\lambda$ -anse.

### Démonstration 5 - 6

Ces deux théorèmes sont démontrés, en détail, dans l'ouvrage de *Milnor* présent en bibliographie.

#### Définition 18 Scindement de Heegaard

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux corps en anses de même genre  $g$ .

Soit  $h : \partial H_1 \rightarrow \partial H_2$  un homéomorphisme renversant l'orientation.

Soit  $M = H_1 \cup_h H_2$  la 3-variété obtenue en collant la frontière de  $H_1$  et la frontière de  $H_2$ .

$M$  est alors une 3-variété close et orientable, et le triplet  $(H_1, H_2, h)$  est appelé scindement de Heegaard de genre  $g$  de  $M$ .

#### Proposition 7

La sphère  $S^3$  admet, pour tout  $g \in \mathbb{N}$ , un scindement de Heegaard de genre  $g$ .

### Démonstration 7

Pour  $g = 0$ , le découpage en deux hémisphères correspond de façon évidente.

Pour  $g = 1$ , on part d'un corps  $H$ , homéomorphe à  $\mathcal{D}^3$ , inclus dans  $S^3$ .

À  $H$ , on ajoute une anse et on obtient  $H'$ , corps en anse de genre 1.

À  $H'$ , on ajoute la partie homéomorphe à  $\mathcal{D}^2$ , (en hachuré rouge) sur la figure présentée ici ; et on l'épaissit.

On obtient donc  $H''$ , obtenu à partir de  $H'$  auquel on a ajouté une copie de  $\mathcal{D}^2 \times [-1; +1]$ .  
 $H''$  est donc homéomorphe à  $\mathcal{D}^3$ .

Le complémentaire de  $H''$  dans  $S^3$  est donc lui aussi homéomorphe à  $\mathcal{D}^3$ . On peut s'en convaincre en remarquant que déjà, le complémentaire d'un disque  $\mathcal{D}^2$  dans  $S^2$  est homéomorphe à  $\mathcal{D}^2$ .  
On note  $C''$  ce complémentaire.

Puis, on retire à  $H''$  la copie de  $\mathcal{D}^2 \times [-1; +1]$  qu'on vient d'ajouter ; on retrouve donc  $H'$ , corps en anses de genre 1.

Au même moment, on ajoute à  $C''$  cette copie. Remarquons donc qu'on vient d'ajouter à  $C''$  une anse : on note  $C'$  le corps en anses de genre 1 alors obtenu.

Et finalement :  $S^3 = H' \cup C'$ , où  $H'$  et  $C'$  sont deux corps en anses de genre 1.

Ce procédé peut être facilement modifié pour obtenir la proposition dans le cas général : on n'ajoute plus au début une anse, mais  $g$  anses.

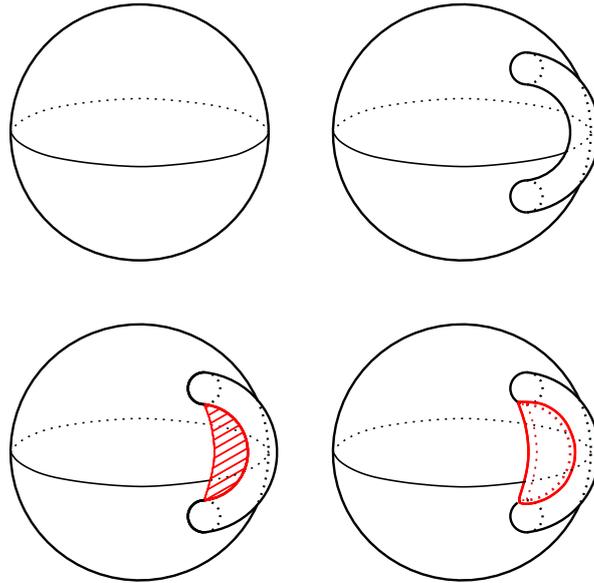


FIGURE 12 – En haut à gauche :  $H$  ; en haut à droite :  $H'$  ; en bas : les deux étapes de construction de  $H''$ .

### Proposition 8

Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $M$  est une  $n$ -variété) est une fonction de Morse, et si  $a$  est une valeur régulière de  $f$ , alors  $f^{-1}(a)$  est une sous-variété de  $M$ .

### Démonstration 8

Bien évidemment, si  $a$  n'est pas dans l'image de  $f$ ,  $f^{-1}(a) = \emptyset$  est une sous-variété de  $M$ .

Sinon,  $\exists x^0 \in M$ ,  $f(x^0) = a$  et  $Df(x^0) \neq 0$ .

On se place dans une carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$  centrée en  $x^0$ .

Comme  $Df(x^0) \neq 0$ , on a :  $\exists i$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \neq 0$ .

Sans perte de généralité, on suppose :  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \neq 0$ .

On considère :

$$F : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto (f(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \end{cases} .$$

Ainsi,

$$J_F(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible car  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \neq 0$ .

Par le théorème d'inversion locale,

$$\exists U' \text{ voisinage de } x^0, \exists V' \text{ voisinage de } F(x^0), F : U' \rightarrow V' \text{ difféomorphisme.}$$

On a de plus :  $p_1 \circ F = f$ , donc pour  $y \in V'$ ,  $p_1(y) = f \circ F^{-1}(y)$ . Et :

$$f^{-1}(a) = F^{-1} \circ p_1^{-1}(a) = F^{-1}(\{a\} \times \mathbb{R}^{n-1})$$

Et donc  $f^{-1}(a)$  est bien une sous-variété de  $M$ ,  $F$  étant un difféomorphisme (localement).

### Théorème 9 Existence d'un scindement de Heegaard

Toute 3-variété connexe, close et orientable possède un scindement de Heegaard.

#### Démonstration 9

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse. On suppose que  $f$  est auto-indexée (on admet l'existence d'une telle fonction).

Comme  $M$  est de dimension 3, l'indice d'un point critique varie entre 0 et 3.

Un point critique d'indice 0 est associé à une hessienne définie positive : c'est donc un minimum.

D'après le théorème 6, on a, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit :

$$M^{0+\varepsilon} \simeq M^{0-\varepsilon} \cup \mathcal{D}^0 \times \mathcal{D}^3 \simeq \emptyset \cup \{\text{point}\} \times \mathcal{D}^3 \simeq \mathcal{D}^3.$$

La valeur critique suivante vaut 1. D'après le théorème 5 :

$$M^{1-\varepsilon} \simeq M^{0+\varepsilon} \simeq \mathcal{D}^3.$$

Soit  $g$  le nombre de points critiques d'indice 1,  $M^{1+\varepsilon}$  est donc homéomorphe à  $M^{1-\varepsilon}$  avec  $g$  1-anses attachées.

Par conséquent,  $M^{1+\varepsilon}$  est un corps en anses de genre  $g$ .

Et comme l'intervalle  $[1 + \varepsilon; 3/2]$  ne contient pas de valeur critique,

$$M^{3/2} \simeq M^{1+\varepsilon} \text{ est un corps en anses de genre } g.$$

On définit ici la variété de sur-niveau  $a$  :  $M_a = f^{-1}([a; 3])$ .

Par symétrie, (en considérant  $-f$ ), on voit que  $M_{3/2}$  est aussi un corps en anses de genre  $g'$ .

Et comme  $3/2$  est une valeur régulière,  $f^{-1}(3/2)$  (intersection de  $M^{3/2}$  et  $M_{3/2}$ ) est une sous-variété de  $M$ .

C'est à la fois le bord de  $M^{3/2}$  (donc une surface close orientable connexe de genre  $g$ ), et le bord de  $M_{3/2}$  (donc une surface close orientable connexe de genre  $g'$ ).

Donc  $g = g'$  et on a donc obtenu un scindement de *Heegaard* de  $M$ .

## 2.4 Quelques lemmes utiles

### **Théorème 10** *Lickorish Twist Theorem*

Soit  $M$  une surface close orientable de genre  $g$ .

Alors tout homéomorphisme de  $M$  sur lui-même préservant l'orientation est isotope à un produit d'homéomorphismes de torsion autour des  $(3g - 1)$  courbes dessinées ci-dessous.

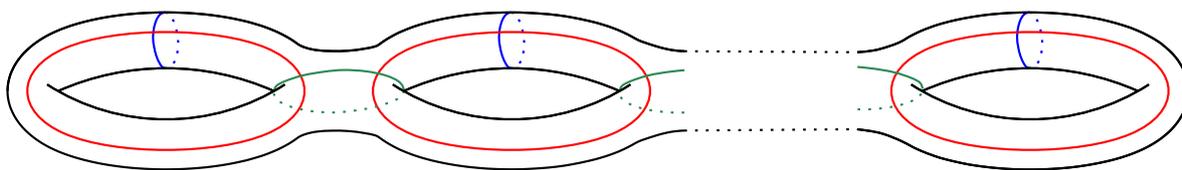


FIGURE 13 – Les  $(3g - 1)$  courbes du *Lickorish Twist Theorem*.

### **Démonstration 10**

On ne démontrera pas ce théorème ici, l'article de *Lickorish* présent en bibliographie en apportant une démonstration (en anglais).

### **Lemme 11**

Soit  $H$  un corps en anses (l'hypothèse variété compacte à bord suffit),  $f : \partial H \rightarrow \partial H$  un homéomorphisme isotope à l'identité.

Alors on peut étendre  $f$  en un homéomorphisme  $\bar{f} : H \rightarrow H$ , égal à l'identité, sauf éventuellement sur un collier de  $\partial H$ .

### **Démonstration 11**

$f : \partial H \rightarrow \partial H$  est isotope à l'identité, donc il existe une isotopie  $f_t : \partial H \rightarrow \partial H$ , telle que  $f_0 = f, f_1 = \text{id}$  et pour tout  $t \in [0; 1]$ ,  $f_t$  est un homéomorphisme.

On construit l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \partial H \times [0; 1] & \rightarrow & \partial H \times [0; 1] \\ (x, t) & \mapsto & (f_t(x), t) \end{cases} .$$

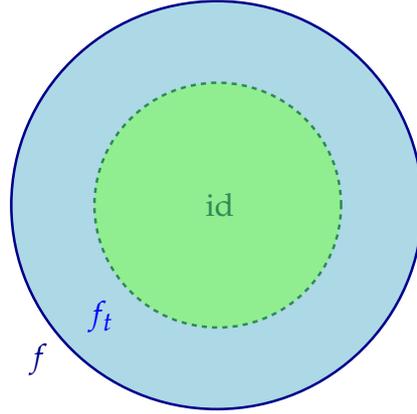


FIGURE 14 – Prolongement de  $f$ , défini sur  $\partial H$  (en bleu foncé) à  $H$  tout entier. L'homéomorphisme obtenu ne fait alors bouger qu'un collier de  $\partial H$  (en bleu clair).

On a  $\Phi(x, 1) = (x, 1)$ , donc on peut prolonger  $\Phi$  au coeur de  $\partial H \times [0; 1]$  par l'identité.

On a ainsi prolongé  $f$  en un homéomorphisme de  $H$ , égal à l'identité au delà d'un collier de  $\partial H$ .

**Lemme 12**

Soient  $H$  et  $H'$  deux corps en anses de même genre.

Soit  $f : \partial H \rightarrow \partial H'$  un homéomorphisme.

Alors il existe des tores solides disjoints  $V_1, \dots, V_r$  dans  $H$  et  $V'_1, \dots, V'_r$  dans  $H'$  tels que  $f$  s'étende en un homéomorphisme

$$\bar{f} : H \setminus (\mathring{V}_1 \cup \dots \cup \mathring{V}_r) \rightarrow H' \setminus (\mathring{V}'_1 \cup \dots \cup \mathring{V}'_r).$$

**Démonstration 12**

$H$  et  $H'$  étant des corps en anses de même genre, on sait qu'ils sont homéomorphes. Travaillant à homéomorphisme près, on peut alors supposer  $H = H'$ .

De plus, on peut supposer que  $f : \partial H \rightarrow \partial H$  préserve l'orientation.

Aussi, tout homéomorphisme isotope à l'identité peut s'étendre à un homéomorphisme de  $H$  sur lui-même, en ne faisant bouger qu'un collier de la frontière (d'après le lemme précédent).

Et par le *Lickorish Twist Theorem*,  $f$  est isotope à la composition d'homéomorphismes de torsions autour des  $(3g - 1)$  courbes canoniques.

On écrit alors (quitte à ne pas considérer un collier de  $\partial H$ ) :

$$f = \tau_r \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

où  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$  sont des homéomorphismes de torsion canoniques.

Ainsi  $\tau_1$  est l'identité en dehors d'un voisinage en forme d'anneau  $A$  de sa courbe de torsion dans  $\partial H$ .

Il faut alors imaginer qu'on creuse alors, dans  $H$ , un tunnel, juste en-dessous de cet anneau, sous un collier de  $\partial H$ .

Ce tunnel est un tore solide qu'on note  $V_1$ .

La région entre  $V_1$  et  $A$  est alors une copie de  $A \times [0; 1]$ .

On peut la tordre par

$$\tau_1 \otimes \text{id} : \begin{cases} A \times [0; 1] & \rightarrow A \times [0; 1] \\ (x, t) & \mapsto (\tau_1(x), t) \end{cases}$$

(où  $t$  représente la profondeur du point  $(x, t)$  dans ce collier de  $\partial H$ ).

On peut alors étendre  $\tau_1$  par l'identité sur le reste de  $H \setminus \mathring{V}_1$ ; on a ainsi construit  $\bar{\tau}_1$ .

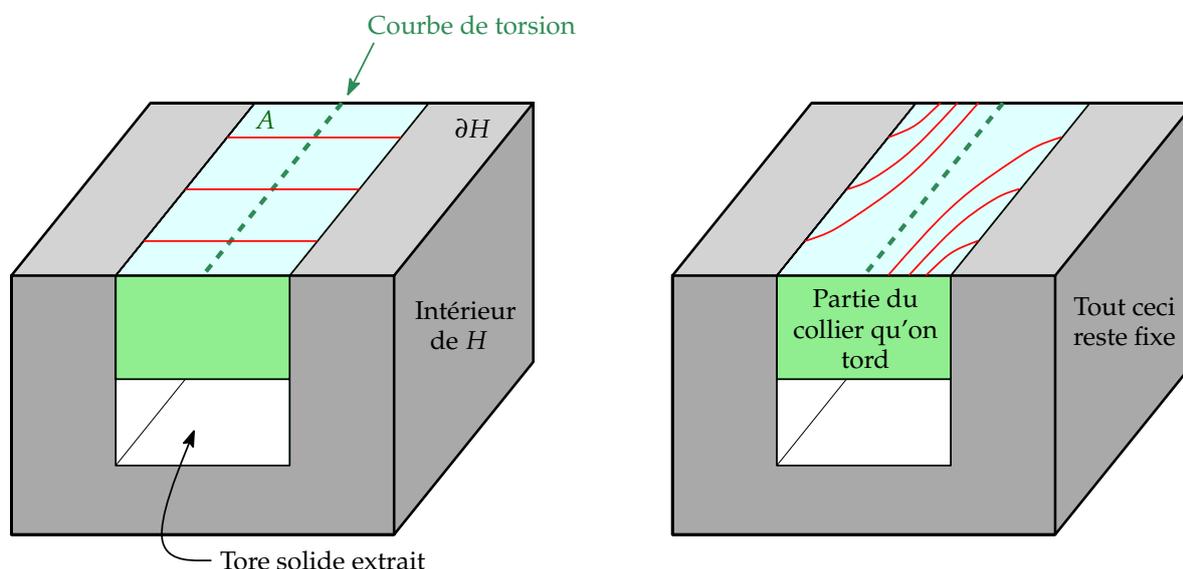


FIGURE 15 – Action de l'homéomorphisme  $\bar{\tau}_1$  sur  $H$  privé d'un tunnel (tore solide)  $V_1$ .

De la même façon, on peut étendre  $\tau_2$  à  $\bar{\tau}_2$  sur  $H \setminus \mathring{V}_2$ .

Il faut quand même faire attention à une subtilité : le second tunnel devra peut-être être creusé sous le premier. Il faut en effet que le premier tunnel n'intersecte pas le second. Mais la suite imposera même qu'il ne soit pas au dessus du premier.

En itérant le procédé, on creuse  $r$  tunnels  $V_1, \dots, V_r$  qui sont des tores solides disjoints, tels que  $V_j$  est plus profond que  $V_i$  dès que  $i < j$ , et on construit des extensions  $\bar{\tau}_i : H \setminus \mathring{V}_i \rightarrow H \setminus \mathring{V}_i$ , qui sont, entre autres, telles que  $\bar{\tau}_i(V_j) = V_j$  (c'est ceci qui impose qu'on creuse de plus en plus profondément nos tunnels).

Il reste ensuite à définir

$$\bar{f} = \bar{\tau}_r \circ \dots \circ \bar{\tau}_2 \circ \bar{\tau}_1 \text{ sur } H \setminus (\mathring{V}_1 \cup \mathring{V}_2 \cup \dots \cup \mathring{V}_r).$$

On aura alors, pour  $i < r$ ,  $V'_i = \bar{\tau}_r \circ \dots \circ \bar{\tau}_{i+1}(V_i)$  et  $V'_r = V_r$ , qui sont bien des tores solides.

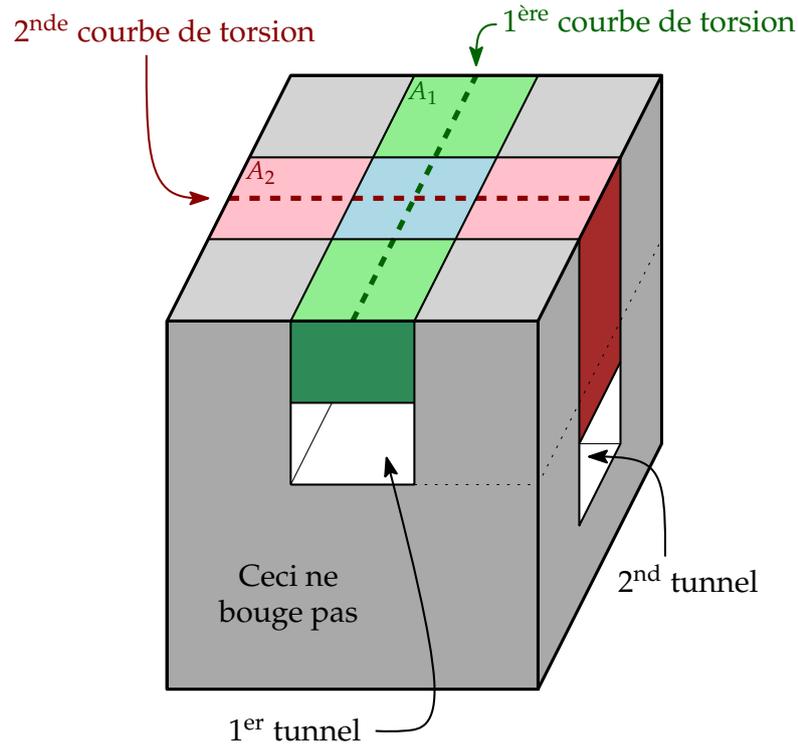


FIGURE 16 – Creusement d’un second tunnel dans  $H$ . Seules les zones grisées sont fixes.

Et

$$\bar{f} : H \setminus (\mathring{V}_1 \cup \dots \cup \mathring{V}_r) \rightarrow H \setminus (\mathring{V}'_1 \cup \dots \cup \mathring{V}'_r)$$

répond aux contraintes fixées.

## 2.5 Corps de la démonstration

Rappelons désormais le théorème énoncé en introduction :

### **Théorème 13 Lickorish et Wallace (1960-1962)**

Toute variété close, orientable et connexe de dimension 3 est obtenue par chirurgie de Dehn sur un entrelacs de la sphère  $S^3$ .

De plus, on peut trouver une chirurgie dont les coefficients sont tous  $\pm 1$ .

### **Démonstration 13**

Soit  $M$  une 3-variété close, orientable et connexe.

Soit  $M = H'_1 \cup_{h'} H'_2$  un scindement de Heegaard de  $M$  (on note  $g$  son genre), avec  $h' : \partial H'_2 \rightarrow \partial H'_1$  un homéomorphisme.

De même, on note  $\mathcal{S}^3 = H_1 \cup_h H_2$  un scindement de Heegaard de  $\mathcal{S}^3$  de genre  $g$ , avec  $h : \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$  un homéomorphisme.

Comme les corps en anses de même genre sont homéomorphes, soit  $k : H_1 \rightarrow H'_1$  un homéomorphisme.

On regarde l'homéomorphisme  $(h')^{-1}kh : \partial H_2 \rightarrow \partial H'_2$ .

Par le lemme 12, on peut étendre cet homéomorphisme en un autre homéomorphisme :

$$\overline{(h')^{-1}kh} : H_2 \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_r) \rightarrow H'_2 \setminus (V'_1 \cup \dots \cup V'_r)$$

où  $V_1, \dots, V_r$  (et  $V'_1, \dots, V'_r$ ) sont  $r$  tores solides disjoints.

Ceci permet d'étendre  $k$  en un homéomorphisme :

$$\bar{k} : \begin{cases} \mathcal{S}^3 \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_r) & \rightarrow M \setminus (V'_1 \cup \dots \cup V'_r) \\ x \in H_1 & \mapsto k(x) \in H'_1 \\ y \in H_2 \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_r) & \mapsto \overline{(h')^{-1}kh}(y) \in H_2 \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_r) \end{cases}$$

En reprenant les notations du lemme 12, on a :

$$\bar{k}(\partial V_i) = \bar{\tau}_r \circ \dots \circ \bar{\tau}_1(\partial V_i) = \bar{\tau}_r \circ \dots \circ \overline{\tau_{i+1}}(\partial V_i) = \partial V'_i.$$

Et d'après la définition des homéomorphismes de torsion, la préimage d'un méridien  $\mu'_i$  de  $\partial V'_i$  est une courbe  $J_i = \mu_i \pm \lambda_i$  ( $\mu_i$  et  $\lambda_i$  sont respectivement méridien et longitude de  $V_i$ ).

$M$  est donc le résultat d'une chirurgie sur  $\mathcal{S}^3$  sur les tores solides  $V_1, \dots, V_r$ , de coefficients associés tous dans  $\{\pm 1\}$ .

### 3 Un corollaire

#### Définition 19 Cobordisme

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés compactes orientées.

$M$  et  $N$  sont dites cobordantes si leur réunion disjointe peut être réalisée comme le bord d'une variété à bord compacte  $L$ .

On dit alors que  $L$  est un cobordisme entre  $M$  et  $N$  et on a :  $\partial L = -M \sqcup N$  (où  $-M$  désigne la variété  $M$  dont on a renversé l'orientation).

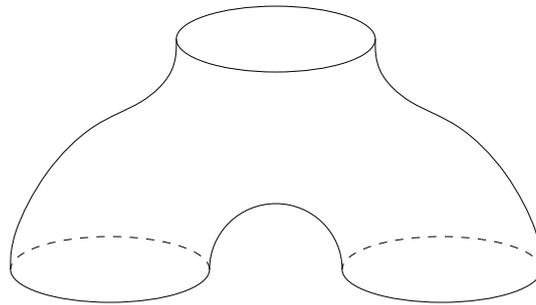


FIGURE 17 – Le pantalon réalise un cobordisme entre le cercle et l'union disjointe de deux cercles.

Un autre exemple de 3-cobordisme est le cylindre  $M \times [0;1]$  où  $M$  est une variété sans bord de dimension 3.

#### Définition 20 Parallélisation d'un entrelacs

On appelle parallélisation d'un entrelacs  $L$  le choix d'une longitude pour chaque composante de  $L$ .

En d'autres termes, à chaque composante  $L_i$ , on associe une courbe  $J_i$  (voir figure 9) par rapport à laquelle on effectuera une chirurgie.

On notera  $\chi(M, L)$  le résultat de la chirurgie sur  $M$  sur un entrelacs parallélisé  $L$ .

### Définition 21 Simple connexité

Si  $X$  est un espace topologique connexe par arcs, on dit qu'il est simplement connexe si tout lacet tracé sur  $X$  est homotope à un point.

Intuitivement, on peut tirer sur le lacet pour le rétrécir jusqu'à ce qu'il ne forme plus qu'un point ; il n'y a pas d'obstacle (c'est-à-dire de trou).

On parle aussi de parties simplement connexes ; une partie d'un espace topologique est dite simplement connexe si, munie de la topologie induite, elle constitue un espace topologique simplement connexe.

### Théorème 14 Corollaire du théorème de *Lickorish* et *Wallace*

Toute 3-variété close, orientable, et connexe est le bord d'une 4-variété orientable et même simplement connexe.

#### Démonstration 14

Soit  $M$  une 3-variété close, orientable et connexe.

D'après le théorème de *Lickorish* et *Wallace*,  $M = \chi(\mathcal{S}^3, L)$  pour un certain entrelacs parallélisé  $L \subset \mathcal{S}^3$ .

Soit  $L_i$  une composante de l'entrelacs  $L$ , de courbe associée  $J_i$ .

On considère un homéomorphisme  $h : \partial\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^2 \rightarrow N(L_i)$ , tel que  $h(\mathcal{S}^1 \times \{0\}) = L_i$  et pour tout point  $x \in \partial\mathcal{D}^2$ ,  $h(\mathcal{S}^1 \times \{x\}) = J_i$ .

On recolle ensuite à  $\mathcal{S}^3 \times [0; 1]$  une 2-anse  $\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^2$  en identifiant  $\partial\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^2$  à  $N(L_i)$ .

On obtient :

$$X = \mathcal{S}^3 \times [0; 1] \cup_h \mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^2.$$

En fait,  $X$  est un cobordisme entre  $\mathcal{S}^3 \times \{0\}$  et  $\chi(\mathcal{S}^3, L_i)$  : on a retiré à  $\mathcal{S}^3 \times \{1\}$  un voisinage tubulaire de  $L_i$ , qu'on a ensuite recollé en identifiant un méridien de  $\partial N(L_i)$  avec  $J_i$ .

On peut généraliser et coller à  $\mathcal{S}^3 \times [0; 1]$  autant d'anses qu'il convient pour former un cobordisme entre  $\mathcal{S}^3 \times \{0\} = \mathcal{S}^3$  et  $\chi(\mathcal{S}^3, L) = M$ .

En recollant à  $\mathcal{S}^3$  une boule  $\mathcal{D}^4$ , le long de son bord, on obtient que  $M$  borde une 4-variété  $X' = X \cup \mathcal{D}^4$ , obtenue en ajoutant à  $\mathcal{S}^3 \times [0; 1] \cup \mathcal{D}^4 \simeq \mathcal{D}^4$  un certain nombre de 2-anses  $\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^2$ .

Il reste à montrer que cette variété est bien simplement connexe.

A priori, on peut penser que le fait de rajouter des anses fait perdre le caractère de simple connexité, comme lorsque qu'on rajoute des anses à  $\mathcal{D}^3$ . Mais cette intuition est fautive en dimensions supérieures.

$\mathcal{D}^4$  étant clairement simplement connexe, il ne peut se poser de problème que quand un lacet passe par une anse.

Si ce lacet passe par le centre de l'anse  $\mathcal{D}^2 \times \mathcal{D}^2$ , on le déforme pour lui faire éviter le centre.

Puis on utilise un champ de vecteurs radial, nul au centre de l'anse, pour repousser ce lacet dans la boule  $\mathcal{D}^4$ . Alors ce lacet est donc rétractible en un point, et l'objet  $X'$  est bien simplement connexe.

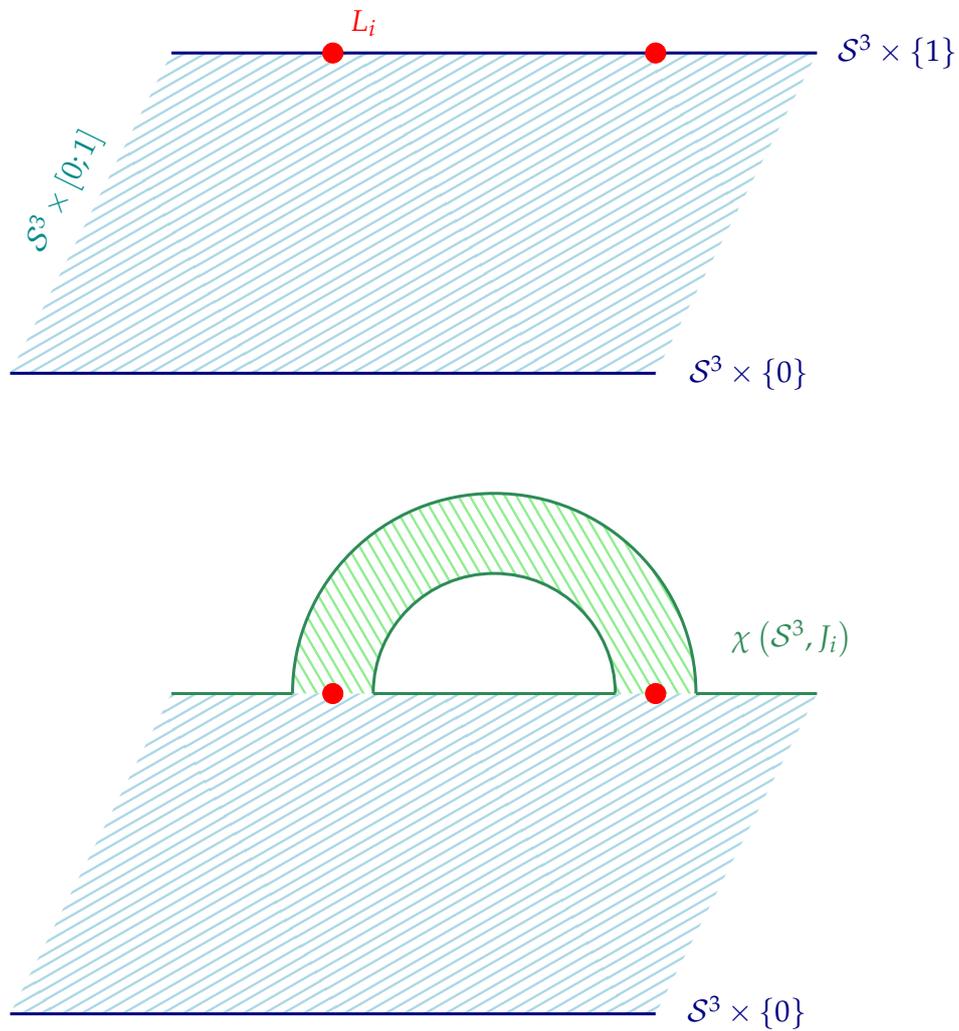


FIGURE 18 – En haut,  $\mathcal{S}^3 \times [0; 1]$ . En bas, on a obtenu  $X$  en recollant une 2-anse le long de  $\partial N(L_i)$ .

## Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Vincent Colin, mon maître de stage, pour sa disponibilité, sa gentillesse, ses explications et pour son aide tout au long de mon stage.

Je remercie également Guillaume Roux, qui m'a bien aidé également pendant qu'il effectuait son stage de fin de M2 dans le même bureau que moi.

## Références

- [1] Dale ROLFSEN, *Knots and Links* (3<sup>rd</sup> printing), American Mathematical Society, 2003
- [2] Florian DELOUP, *Quelques Aspects des Invariants de Variétés de Dimension 3*, 2009
- [3] W. B. R. LICKORISH, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds* in *Annals of Mathematics*, 1962
- [4] John MILNOR, *Morse Theory* (5<sup>th</sup> printing), Princeton University Press, 1973
- [5] Jean-Baptiste CAMPESATO, *Cohomologie de de Rham*, 2012
- [6] Claude GODBILLON, *Éléments de topologie algébrique* (2<sup>nde</sup> édition), Hermann, 1998
- [7] Emmanuel MILITON, *Normes invariantes par conjugaison sur  $\text{Diff}_0(M)$* , 2009