ENS Rennes - Université de Rennes 1
Magistère - Master 1 Mathématiques

TD 3 bis. Equation de la chaleur

Exercice 1. On note g_t le noyau de la chaleur, défini par :

$$\forall t > 0, x \in \mathbb{R}^d\,,\ g_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Pour une donnée initiale $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$, on pose $u(x,t) := (f \star g_t)(x)$.
Montrer que u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d \times]0,+\infty[$ et vérifie

$$\forall t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^d\,,\ \partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t)$$

d'une part, et d'autre part

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\,,\ u(x,t) \underset{t\to 0}{\to} f(x)$$

Exercice 2. Avec les notations précédentes, pour $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$ et $t > 0$, on définit

$$S_t f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto (f \star g_t)(x) \end{array} \right.$$

et on pose $S_0 f = f$.
Montrer que :

1. si $f \geqslant 0$ alors $S_t f \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$
2. pour $s, t \geqslant 0$, $S_{t+s} = S_t \circ S_s$ (propriété de semi-groupe).

Exercice 3. On garde toujours les notations précédentes et on fixe $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ telle que f et ∇f soient bornées, précisément $\|\nabla f\|_\infty \leqslant L$ pour une constante $L > 0$.

1. On fixe $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ et on définit

   $$\forall s \in [0,t]\,,\ \phi(s) := S_s\left(e^{S_{t-s}f}\right)(x)$$

   Montrer que

   $$\forall s \in]0,t[\,,\ \phi'(s) = S_t\left(|\nabla F|^2 e^F\right)$$

   où $F(x,s) := S_{t-s}f(x)$.
   En déduire que

   $$S_t(e^f)(x) \leqslant e^{S_t f(x) + L^2 t}$$

2. On note γ la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que

   $$\int_{\mathbb{R}^d} e^f \, d\gamma \leqslant e^{\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\gamma + \frac{L^2}{2}}$$

3. Montrer qu'on a égalité si $f(x) = a \cdot x$ avec $|a| = L$.
4. Montrer que pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ 1-lipschitzienne, on a

   $$\forall r > 0\,,\ \gamma\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geqslant r + \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\gamma\right\} \leqslant e^{-\frac{r^2}{2}}$$

Exercice 4. On va montrer l'inégalité de Hölder en utilisant l'équation de la chaleur : pour $\theta \in [0,1]$ et f, g mesurables positives :

$$(L)\ :\ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^\theta g(x)^{1-\theta} dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx\right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, dx\right)^{1-\theta}$$

$$(G)\ :\ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^\theta g(x)^{1-\theta} d\gamma(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\gamma(x)\right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, d\gamma(x)\right)^{1-\theta}$$

On se place ici dans le cas $f, g \in C_b^0 \cap L^1$ pour limiter les calculs.

1. Soit $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ fixés, pour $0 \leqslant s \leqslant t$ on pose

$$\phi(s) := S_s \left[(S_{t-s} f)^\theta \, (S_{t-s} g)^{1-\theta} \right](x)$$

   et

$$F := \ln S_{t-s} f\ ,\ \ G := \ln S_{t-s} g\ ,\ \ K := \theta F + (1-\theta) G$$

   de sorte que $\phi(s) = S_s(e^K)(x)$.
   Montrer que

$$\phi'(s) = S_s \left[e^K \left(|\nabla K|^2 - \theta |\nabla F|^2 - (1-\theta) |\nabla G|^2 \right) \right](x) \leqslant 0$$

2. En déduire (G).
3. En déduire (L).

Exercice 5. On considère cette fois l'équation de Schrödinger

$$(S)\ :\ i\partial_t u = \Delta u \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$$

On fixe une donnée initiale $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $u \in C^0\left([0, +\infty[; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\right)$ telle que

1. u est C^2 sur $\mathbb{R}^d \times]0, +\infty[$
2. u vérifie (S) sur $\mathbb{R}^d \times]0, +\infty[$
3. $u(x, 0) = f(x)$ sur $\mathbb{R}^d$

Montrer que cette solution u est donnée par la formule

$$\forall t \geqslant 0\ ,\ x, \in \mathbb{R}^d\ ,\ u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i|\xi|^2 t + i\xi\cdot x} d\xi$$