Introduction aux problemes inverses

Eulry Hugo
Ecole normale supérieure de Rennes
Magistère de mathématiques

Sous la direction de David Dos Santos Ferreira
Institut Elie Cartan de Lorraine

Notations

- $c, C, C', \tilde{C}, \cdots$: constantes strictement positives
- $\mathbb{C}^- = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$
- $\Re(z)$: partie réelle de z
- $\Im(z)$: partie imaginaire de z
- Si $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k$
- ν : vecteur normal unitaire extérieur
- $\partial_k u$: dérivée partielle de u par rapport à la k-ième composante
- $\nabla u = (\partial_k u)_{1 \leq k \leq N}$: gradient de u
- $\partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u$
- $\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}}$
- $D_k u = -i \partial_k u$
- $Du = -i\nabla$
- $\Delta u = \sum_{k=1}^{N} \partial_{kk}^2 u$: laplacien de u
- $A_q = -\Delta + q$: opérateur de Schrödinger statique
- $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$: opérateur de Cauchy-Riemann
- $d\sigma(x)$: élément de surface en la variable x
- $d\sigma_t(x)$: élément de surface en la variable x, élément différentiel usuel en t
- $\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: espace des distributions sur Ω
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$: classe de Schwartz sur $\mathbb{R}^N$
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$: espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^N$
- $\check{f}(x) = f(-x)$
- $\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi \cdot x}\, dx$: transformée de Fourier de f
- $\mathcal{F}_{x_N} f(x', \xi_N) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi_N x_N}\, dx_N$: transformée de Fourier partielle en x_N de f
- $\mathcal{I}_\omega f(x) = \int_0^{+\infty} f(x + t\omega)\, dt$: transformation faisceau ("cone-beam transform") de f
- $\cdot$: produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^N$
- $|\ \ |$: norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^N$
- E' : dual topologique de E
- $\langle\ ,\ \rangle_{E',E}$: crochets de dualité E', E
- $(\ ,\ )_H$: produit scalaire dans l'espace de Hilbert H
- $\|\ \ \|_H$: norme sur H
- $\mathcal{B}_E$: boule unité ouverte de E
- $\overline{\mathcal{B}}_E$: boule unité fermée de E
- $\mathcal{L}(E, F)$: opérateurs continus de E dans F
- $\mathcal{K}(E, F)$: opérateurs compacts de E dans F
- $Ker(T)$: noyau de T
- $Im(T)$: image de T
- T^* : adjoint de l'opérateur T
- $\rho(T) = \{\lambda$ tel que $T - \lambda Id$ est inversible$\}$: ensemble résolvant de T
- $\sigma(T) = \{\lambda$ tel que $T - \lambda Id$ n'est pas inversible$\}$: spectre de T
- $VP(T) = \{\lambda$ tel que $T - \lambda Id$ n'est pas injectif$\}$: valeurs propres de T
- $R_T(\lambda) = (T - \lambda Id)^{-1}$: résolvante de l'opérateur T

Introduction et remerciements

D'une façon générale, les mathématiques, et plus particulièrement l'analyse, sont largement utilisées pour des applications en physique. De fait, il n'est pas rare de voir cette branche réduite à la résolution d'équations différentielles ou au calcul numérique afin de justifier des modèles concrets soumis par les physiciens.
Cette confusion avec les mathématiques appliquées conduit certains grands noms à catégoriser les problèmes d'équation : c'est la notion de "problème bien posé". Le mathématicien J. Hadamard introduit ce concept en avançant qu'un modèle mathématique représentant un phénomène physique doit respecter certaines propriétés.

Soient X et Y des espaces normés, $f \in Y$ et $A : U \subset X \to Y$ une application.
On dit que le problème

$$A\varphi = f$$

est bien posé s'il vérifie les trois conditions suivantes :

— *une solution $\varphi \in X$ existe*
— *une telle solution est unique*
— *φ dépend continument du second membre f*

C'est le plus souvent l'approche directe de ce genre de problème qui est étudiée : "Existe-t-il une solution ?", "Est-elle unique ?", "Quelle est sa régularité ?", etc...
Cependant, certains se sont intéressés à la démarche inverse : considérant un problème bien posé, on ne cherche plus à le résoudre dans le sens usuel, mais plutôt connaissant la solution d'un tel problème, on veut en déduire des informations sur l'application de A ou sur l'espace de départ X. C'est ce qu'on appelle la théorie des "problèmes inverses".
Un exemple bien connu est la question posée par M. Kac comme titre d'un article du *American Mathematical Monthly* de 1966 :

"Can one hear the shape of a drum ?"

qui pose la question de déterminer la géométrie du domaine spatial de départ pour l'équation des ondes.

On se propose dans ce mémoire d'étudier trois problèmes inverses pour les équations aux dérivées partielles consistant en la détermination de l'opérateur de départ à l'aide de données partielles sur la solution. Le premier est le problème inverse de la conductivité de Calderòn, qui étudie l'identifiabilité d'un terme de potentiel dans une équation elliptique, connaissant le comportement de la solution sur le bord du domaine. Le deuxième a le même but que le premier, mais cette fois le potentiel est à déterminer à partir des données spectrales de l'opérateur. Enfin, le dernier problème est celui de l'identification d'un potentiel dans une équation hyperbolique au moyen d'informations sur le comportement de la solution au bord du domaine d'étude.
Avant de se lancer dans l'étude de ces problèmes, on prendra le temps d'introduire et de se familiariser avec plusieurs outils d'analyse fonctionnelle, dont l'utilisation est récurrente et indispensable dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon maître de stage David Dos Santos Ferreira pour avoir accepté de m'encadrer, pour tout le temps qu'il m'a consacré, pour toute l'aide qu'il m'a apporté, pour sa clarté, pour sa passion des mathématiques, pour les cafés qu'il m'a offerts, pour m'avoir initié au monde de la recherche et m'avoir donné l'envie d'en faire un avenir. Je le remercie chaleureusement et espère avoir l'occasion de travailler avec lui de nouveau.

Merci également à toute l'équipe de l'Institut Elie Cartan de Lorraine à Nancy pour leur accueil et les moyens qu'ils ont mis à ma disposition.

Enfin, merci à ma famille et mes amis, pour leur soutien, leurs nombreux conseils et critiques et leurs encore plus nombreuses relectures de ce mémoire qui n'aurait en aucun cas le rendu actuel sans leur bienveillance.

Table des matières

1 Outils d'analyse fonctionnelle

L'étude des équations aux dérivées partielles nécessite l'utilisation d'outils bien spécifiques d'analyse fonctionnelle, ce chapitre est une introduction aux résultats absolument nécessaires pour justifier le travail qui sera effectué après.

1.1 Espaces de Sobolev, opérateur de trace

1.1.1 Espaces de Sobolev

Une famille d'espace se prête bien à la résolution des équations aux dérivées partielles : les espaces de Sobolev. En effet, ils traduisent une notion de stabilité des espaces L^p par rapport à la dérivation au sens faible.
D'une façon générale on définit pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$\forall m \in \mathbb{N}\,,\ p \in [1, +\infty]\,,\ W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega)\,,\ \forall |\alpha| \leq m,\, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

(où la dérivée a lieu au sens des distributions)

$$\text{et} \qquad \forall u \in W^{m,p}(\Omega),\ \text{on pose}\ \|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

Par la suite, nous nous contenterons uniquement du cas $p = 2$ et on notera $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$:

$$H^m(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega)\,,\ \forall |\alpha| \leq m,\, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\right\}$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

ce qui lui confère une structure d'espace de Hilbert séparable.

Démonstration. Soit $(u_n)_n \in (H^m(\Omega))^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors $(u_n)_n$ et $(\partial^\alpha u_n)_n$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)\,,\ \forall |\alpha| \leq m$. Par complétude, elles convergent donc dans $L^2(\Omega)$ vers des fonctions g et $g_\alpha\,,\ \forall |\alpha| \leq m$ respectivement. On a donc

$$\|u_n - g\|^2_{H^m(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha (u_n - g)\|^2_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car par continuité de la dérivation au sens faible, on a $\partial^\alpha g = g_\alpha$. Donc par structure d'espace vectoriel, $g \in H^m(\Omega)$ et $(u_n)_n$ converge dans $H^m(\Omega)$.
La séparabilité est immédiate car on identifie $H^m(\Omega)$ à un sous-espace vectoriel fermé d'un produit d'espaces $L^2(\Omega)$ via l'application $u \mapsto \{\partial^\alpha u\,,\ |\alpha| \leq m\}$ et $L^2(\Omega)$ est lui-même séparable. $\square$

Remarquons que par lecture directe de la définition, si α est un multi-indice vérifiant $|\alpha| \leq m$ et $u \in H^m(\Omega)$, alors $\partial^\alpha u \in H^{m-|\alpha|}(\Omega)$.
On définit les espaces $H^m_0(\Omega)$, pour un ouvert Ω borné, par

$$H^m_0(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}}$$

Dans le cas particulier où on travaille avec $\Omega = \mathbb{R}^N$, on a une définition équivalente par les transformées de Fourier en remarquant que

$$\begin{aligned} u \in H^m(\Omega) &\Leftrightarrow \forall|\alpha| \leq m\,,\ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \forall|\alpha| \leq m\,,\ \xi \mapsto \widehat{u}(\xi)\xi^\alpha \in L^2(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \xi \mapsto \widehat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{m/2} \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

on a la caractérisation équivalente :

$$H^m(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N), (1+|\xi|^2)^{m/2}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

Avec cette nouvelle définition, on peut étendre au cas $m \in \mathbb{R}$, on notera ce paramètre s pour éviter toute confusion.

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N), (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\} \qquad \text{si} \qquad s \geq 0$$

Ces espaces ont naturellement une structure hilbertienne, avec le produit scalaire :

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}\,,\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{v} \right)_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Remarquons la propriété utile suivante :

Proposition 1.1. *Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$:*

$$\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}} = H^s(\mathbb{R}^N) \quad \textit{et} \quad \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}} = H^s(\mathbb{R}^N) \quad \textit{pour } s \geq 0$$

Démonstration. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, on a $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\Omega)$ et comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(u_n)_n$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Posons, pour n entier, $v_n = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-m/2}\widehat{u})$, alors comme $(1+|\xi|^2)^{-s/2}$ ne s'annule pas et $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a $v_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et par définition de $H^s(\mathbb{R}^N)$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ ce qui prouve que $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}} = H^s(\mathbb{R}^N)$. Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on conclut que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. □

Proposition 1.2. *Caractérisation pour $s > 0$:*
On a la caractérisation équivalente suivante :

$$\forall s \in]0,1[\,,\ H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+N}}\,dx\,dy < +\infty \right\}$$

De plus, si $s = m + \sigma$ avec $\sigma \in]0,1[$, alors

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{2\sigma+N}}\,dx\,dy < +\infty\ ,\ \forall|\alpha| = m \right\}$$

et les normes $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ et $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{2\sigma+N}}\,dx\,dy$ sont équivalentes.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $s \in]0,1[$, les autres cas s'en déduisant par dérivation. Soit donc $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, le cas L^2 en découle par densité, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^N\,,\ \int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y)-u(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 |e^{iy\cdot\xi}-1|^2 d\xi$$

Et donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+N}}\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+y)-u(x)|^2}{|y|^{2s+N}}\,dx\,dy \quad \text{par changement de variables} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|e^{iy\cdot\xi}-1|^2}{|y|^{2s+N}} dy \right) d\xi \\ &= C_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 |\xi|^{2s} d\xi \quad \text{où } C_0 \text{ est une constante déterminée} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+N}}\,dx\,dy < +\infty$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2|\xi|^{2s}d\xi < +\infty$ ce qui prouve l'équivalence des définitions et des normes. □

La proposition 1.2 permet de définir les espaces $H^s(\Omega)$ pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ quelconque par

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{2\sigma+N}}\, dx\, dy < +\infty \ , \ \forall |\alpha| = m \right\}$$

où $s = m + \sigma$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in]0,1[$.

Notons qu'il découle directement des définitions que

$$\forall s \geq t \geq 0\, , \ H^s(\Omega) \subset H^t(\Omega)$$

et que pour tout $s \geq 1$, si $u \in H^s(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ est tel que $|\alpha| \leq s$ alors $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\Omega)$.
En particulier $\nabla u \in H^{s-1}(\Omega)$.
En fait, on dit par abus de langage qu'on perd $|\alpha|$ dérivées.
Cette remarque motive la définition suivante :
On note $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H^1_0(\Omega)$. En utilisant la formule d'intégration par parties (théorème 1.8), les termes de bord étant nuls, on a $\{\Delta u, u \in H^1(\Omega)\} \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ avec

$$\forall u \in H^1(\Omega)\, , \ \forall v \in H^1_0(\Omega)\, , \ \Delta u(v) = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

On notera de la même façon $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$.
Une autre caractérisation possible de ces espaces est la méthode d'interpolation complexe étudiée dans [18], [1] et [12]. On ne développera pas ce raisonnement ici, mais on retiendra juste l'inégalité d'interpolation suivante valable pour $s > t \in \mathbb{R}$:

$$\forall \theta \in [0,1]\, , \ \exists C > 0\, , \ \forall u \in H^s(\Omega)\, , \ \|u\|_{H^{\theta t + (1-\theta)s}(\Omega)} \leq C\, \|u\|^\theta_{H^t(\Omega)}\, \|u\|^{1-\theta}_{H^s(\Omega)}$$

1.1.2 Théorie des traces

On définit $\tau : u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \mapsto u_{|x_N=0} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$ l'application "trace sur l'hyperplan $x_N = 0$".

Théorème 1.1. *Opérateur de trace :*
Pour $s > 1/2$, τ s'étend en une unique application linéaire continue

$$\tau : H^s(\mathbb{R}^N) \to H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $f = \tau u$, si $x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N$ on note $x' = (x_1, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$, par inversion de Fourier, on a

$$f(x') = u(x',0) = \frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{R} \mathcal{F}_{x_N} u(x', x_N)\, dx_N$$

et donc

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{R} \widehat{u}(\xi) d\xi_N \right|^2 (1+|\xi'|^2)^{s-1/2} d\xi' \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1+|\xi'|^2)^{s-1/2} \left(\left(\int_\mathbb{R} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi_N \right) \left(\int_\mathbb{R} \frac{d\xi_N}{(1+|\xi|^2)^s} \right) \right) d\xi' \end{aligned}$$

De plus

$$(1+|\xi'|^2)^{s-1/2} \left(\int_\mathbb{R} \frac{d\xi_N}{(1+|\xi|^2)^s} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi'|^2}} \int_\mathbb{R} \frac{d\xi_N}{\left(1 + \frac{\xi_N{}^2}{1+|\xi'|^2}\right)^s} = \int_\mathbb{R} \frac{dt}{(1+t^2)^s}$$

Donc en posant $C^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_\mathbb{R} \frac{dt}{(1+t^2)^s}$ on obtient par Fubini :

$$\|f\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi = C\, \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$$

Et par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$, on a un unique prolongement continu de τ à $H^s(\mathbb{R}^N)$. □

Théorème 1.2. *Surjectivité de l'opérateur trace :*
L'application τ est surjective pour $s > 1/2$.

Démonstration. Pour $f \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})$, on pose

$$p.p.\ \xi \in \mathbb{R}^N\ ,\ \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi')\frac{(1+|\xi'|^2)^{s-1/2}}{(1+|\xi|^2)^s}$$

Alors par transformation de Fourier inverse, on a $\tau u(x) = g(x')$ à une constante multiplicative non nulle près (dûe à la normalisation de la transformation de Fourier), et d'autre part on peut vérifier que $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ (en utilisant le calcul effectué ci-dessus) :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(\xi')(1+|\xi'|^2)^{s-1/2}\left((1+|\xi'|^2)^{s-1/2}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\xi_N}{(1+|\xi|^2)^s}\right)d\xi' \\ &= C\,\|f\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})} < +\infty\end{aligned}$$

□

On va maintenant étendre les notions de trace et d'espace de Sobolev d'ordre non entier au cas d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné à bord lisse. Précisons qu'on dit qu'un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est à bord lisse si sa frontière $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire que pour tout point $x_0 \in \partial\Omega$, il existe une carte locale (U, φ) de $\partial\Omega$ où U est un voisinage de x_0 et φ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

On définit :

$$\mathbb{R}^N_+ := \{x \in \mathbb{R}^N\ ,\ x_N > 0\} \quad \text{et} \quad H^s(\mathbb{R}^N_+) := \left\{u \in H^s(\mathbb{R}^N)\ ,\ u\mathbf{1}_{\mathbb{R}^N_+} \in H^s(\mathbb{R}^N)\right\}$$

et l'application "prolongement par réflexion" :

$$\begin{cases} E : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \\ \qquad\qquad u \mapsto u(x', |x_N|) \end{cases}$$

E définit un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$:
si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ alors

$$\|Eu\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq 2\,\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N_+)}$$

donc on peut étendre E en un unique opérateur linéaire continu de $H^s(\mathbb{R}^N_+)$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 1.3. *La restriction $\rho : H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N_+)$ est surjective.*

Démonstration. La preuve est immédiate en remarquant que $\rho E = id_{H^s(\mathbb{R}^N_+)}$. □

Soit maintenant un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ borné à bord lisse. Alors on peut recouvrir Ω par un nombre fini de boules $\mathcal{B}(x_i, \epsilon)\ ,\ 1 \leq i \leq m$ et pour ϵ assez petit, il existe des C^1 difféomorphismes $\psi_i : \mathcal{B}(x_i, \epsilon) \to \Omega_i$ (où Ω_i est un ouvert de $\mathbb{R}^N$) pour $i \in [|1, m|]$ tels que

$$\begin{cases} \psi_i\left(\mathcal{B}(x_i,\epsilon)\bigcap\Omega\right) &= \{x \in \Omega_i\ ,\ x_N > 0\} \\ \psi_i\left(\mathcal{B}(x_i,\epsilon)\bigcap\partial\Omega\right) &= \{x \in \Omega_i\ ,\ x_N = 0\} \end{cases}$$

Et si on prend Ψ_i une partition de l'unité associée aux $\mathcal{B}(x_i, \epsilon)$, on peut décomposer $u \in H^s(\Omega)$ et se ramener localement au cas de $H^s(\mathbb{R}^N_+)$. On montre alors qu'on peut étendre toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^N_+)$ comme précédemment puis par changement de variables inverse on obtient le résultat pour Ω :

Théorème 1.4. *Surjectivité de l'opérateur trace :*
L'application trace

$$\begin{cases} \gamma : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\partial\Omega) \\ \qquad\qquad u \mapsto u_{|\partial\Omega} \end{cases}$$

est surjective pour $s > 1/2$.

Remarquons également que

$$\forall u \in H_0^m(\Omega)\,,\ u_{|\partial\Omega} = 0$$

Reste à montrer que $H^s(\mathbb{R}_+^N)$ est invariant par difféomorphismes afin de justifier les changements de variables.

Théorème 1.5. *Invariance par difféomorphismes :*
$H^s(\mathbb{R}^N)$ est invariant par difféomorphismes, c'est-à-dire que si ψ est un difféomorphisme de $\Omega_{\tilde{x}}$ sur $\Omega_{\tilde{y}}$ voisinages respectivement de $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^N$ et si $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ au voisinage de $\tilde{y}$ alors $u \circ \psi \in H^s(\mathbb{R}^N)$ au voisinage de $\tilde{x}$.
("$u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ au voisinage de y" : $\exists \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,,\ \phi(y) \neq 0$ tel que $\phi u \in H^s(\mathbb{R}^N)$)

Démonstration. En utilisant la caractérisation de H^s (proposition 1.2) et on restreint la preuve au cas où $0 < s < 1$, les autres cas s'en déduisant par dérivation, on a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+N}}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(\psi(x))-u(\psi(y))|^2}{|\psi(x)-\psi(y)|^{2s+N}}\,|J_\psi(x)|\,|J_\psi(y)|\,dx\,dy$$

Si on prend $f = \phi u$ avec $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,,\ \phi(\tilde{y}) \neq 0$ tel que $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, il suffit de montrer que localement on a $\|x-y\| \geq C\,\|\psi(x)-\psi(y)\|$ pour une certaine constante $C > 0$. Or ψ est un difféomorphisme de $\Omega_{\tilde{x}}$ sur $\Omega_{\tilde{y}}$, donc ψ^{-1} est un difféomorphisme et donc sa différentielle est localement bornée. ϕ étant à support compact autour de $\tilde{y}$, l'existence de $C > 0$ est assurée tel que

$$|\psi(x)-\psi(y)| \leq \frac{1}{C}|x-y|$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(\psi(x))-u(\psi(y))|^2}{|x-y|^{2s+N}}\,dx\,dy &\leq \frac{1}{C^{2s+N}}\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(\psi(x))-u(\psi(y))|^2}{|\psi(x)-\psi(y)|^{2s+N}}\,dx\,dy \\
&\leq \frac{1}{C^{2s+N}}\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+N}}\,\left|J_{\psi^{-1}}(x)\right|\left|J_{\psi^{-1}}(y)\right|\,dx\,dy \\
&\leq \frac{M}{C^{2s+N}}\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+N}}\,dx\,dy < +\infty
\end{aligned}$$

avec $M > 0$ une constante bornant la différentielle de ψ^{-1} sur $\Omega_{\tilde{y}}$. □

1.2 Des inégalités utiles

Cette partie recense deux inégalités qui nous seront essentielles par la suite : les inégalités de Poincaré et de Carleman.

Théorème 1.6. *Inégalité de Poincaré :*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega)\,,\ \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration. Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il suffit de montrer l'inégalité pour les fonctions test. Soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on note aussi u son prolongement par 0 en dehors de Ω. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in \Omega\,,\ \forall y \in \partial\Omega\,,\ u(x) &= u(y) + \int_0^1 \frac{d}{dt}u((1-t)y+tx)dt \\
&= u(y) + (x-y)\cdot\int_0^1 \nabla u(y+t(x-y))dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Et donc} \int_\Omega |u^2(x)| &\leq |x-y|^2 \cdot \int_0^1 |\nabla u(y+t(x-y))|^2 dt \\
&\leq diam(\Omega)^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&\leq diam(\Omega)^2\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$\square$

Cette inégalité interviendra très souvent dans les démonstrations et permet d'établir un contrôle de la norme L^2 par la norme du gradient.
La deuxième inégalité est l'inégalité de Carleman : c'est une inégalité à priori pour l'opérateur de Schrödinger avec un poids exponentiel dépendant d'un paramètre. Elle nous permettra ici de résoudre le problème inverse de Calderòn.

Théorème 1.7. *Inégalité de Carleman :*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné et $q \in L^\infty(\Omega)$. Soit $\alpha \in \boldsymbol{S}^{N-1} + i\boldsymbol{S}^{N-1}$ et notons $\varphi : x \in \mathbb{R}^N \mapsto \alpha \cdot x$. Alors, il existe $c > 0$ et $h_0 > 0$ tels que :

$$\forall h \in]0, h_0] \,,\ \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \,,\ \left\| e^{\varphi/h} u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c\, h \left\| e^{\varphi/h} \left(-\Delta + q\right) u \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration. Soient c et h comme dans l'inégalité à démontrer, $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ et posons $v = e^{\varphi/h}u$, alors $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et l'inégalité est équivalente à

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\, h \left\| e^{\varphi/h} \left(-\Delta + q\right) \left(e^{-\varphi/h} v\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
\Leftrightarrow \|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\, h \left\| \left(\mathcal{P}_{\varphi,h} + q\right) v \right\|_{L^2(\Omega)} \\
\Leftrightarrow h \|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\, h^2 \left\| \left(\mathcal{P}_{\varphi,h} + q\right) v \right\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_{\varphi,h}$ est l'opérateur conjugué de $-\Delta$ par $e^{\varphi/h}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\varphi,h} &= e^{\varphi/h} - \Delta \left(e^{-\varphi/h}\ \cdot\ \right) \\
\mathcal{P}_{\varphi,h} &= e^{\varphi/h} \left(-\frac{\alpha^2}{h^2} e^{-\varphi/h} - e^{-\varphi/h} \Delta + e^{-\varphi/h} \frac{2}{h} \alpha \cdot \nabla \right) \\
\mathcal{P}_{\varphi,h} &= -\left(\frac{\alpha}{h}\right)^2 + D^2 + \frac{2i}{h} \alpha \cdot D
\end{aligned}$$

avec $D = -i\nabla$.
Si on note $\mathcal{Q}_{\varphi,h} = h^2 \mathcal{P}_{\varphi,h} = -\alpha^2 + (hD)^2 + 2hi\alpha \cdot D$, l'inégalité de Carleman est donc équivalente à :

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \,,\ h \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left\| \left(\mathcal{Q}_{\varphi,h} + h^2 q\right) v \right\|_{L^2(\Omega)}$$

C'est cette inégalité qu'on va montrer.
Raisonnons dans un premier temps pour $q = 0$:
On décompose maintenant $\mathcal{Q}_{\varphi,h}$ en partie autoadjointe et anti-autoadjointe :

$$\mathcal{Q}_{\varphi,h} = \underbrace{\left(-\alpha^2 + (hD)^2\right)}_{=A} + i \underbrace{\left(2\alpha \cdot hD\right)}_{=B}$$

Alors $A^* = A$ et $B^* = B$ et si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}_{\varphi,h} v\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|Av\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Bv\|^2_{L^2(\Omega)} + (Av\,,\, iBv)_{L^2(\Omega)} + (iBv\,,\, Av)_{L^2(\Omega)} \\
&= \|Av\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Bv\|^2_{L^2(\Omega)} - i\,(Av\,,\, Bv)_{L^2(\Omega)} + i\,(Bv\,,\, Av)_{L^2(\Omega)} \\
&= \|Av\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Bv\|^2_{L^2(\Omega)} + i\,([A, B]\, v\,,\, v)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \text{où on a intégré par parties, sans terme de bord car } v \in \mathcal{D}(\Omega)
\end{aligned}$$

Or A et B sont des opérateurs différentiels à coefficients constants agissant sur $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc ils commutent et alors $[A, B]\, v = 0$.

Reste à estimer $\|Av\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Bv\|^2_{L^2(\Omega)}$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}_{\varphi,h}v\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|Av\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Bv\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \|Bv\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq h^2\left(\frac{2|\alpha|}{C}\right)^2 \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{où } C>0 \text{ est donnée par l'inégalité de Poincaré}
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien l'inégalité : $h\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|\mathcal{Q}_{\varphi,h}v\|_{L^2(\Omega)}$.
Prenons maintenant le cas $q \in L^\infty(\Omega)$ non identiquement nulle :
on a par ce qui précède, l'existence d'une constante $c>0$ telle que :

$$\forall h>0\,,\ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ h\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|\mathcal{Q}_{\varphi,h}v\|_{L^2(\Omega)}$$

Alors si $h>0$ et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
h\,\|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\,\|\mathcal{Q}_{\varphi,h}v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c\left\|\left(\mathcal{Q}_{\varphi,h} + h^2 q\right)v\right\|_{L^2(\Omega)} + c\left\|h^2 q v\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c\left\|\left(\mathcal{Q}_{\varphi,h} + h^2 q\right)v\right\|_{L^2(\Omega)} + ch^2\,\|q\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Si on pose $h_0 = \frac{1}{2c\|q\|_{L^\infty(\Omega)}} > 0$, alors pour $h \in]0,h_0]$:

$$h\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left\|\left(\mathcal{Q}_{\varphi,h} + h^2 q\right)v\right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{h}{2}\,\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

et finalement

$$h\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2c\left\|\left(\mathcal{Q}_{\varphi,h} + h^2 q\right)v\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Ainsi,

$$\exists c>0\,,\ h_0>0 \text{ tels que } \forall h \in]0,h_0]\,,\ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ h\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left\|\left(\mathcal{Q}_{\varphi,h} + h^2 q\right)v\right\|_{L^2(\Omega)}$$

et donc

$$\exists c>0\,,\ h_0>0 \text{ tels que } \forall h \in]0,h_0]\,,\ \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ \left\|e^{\varphi/h}u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,h\left\|e^{\varphi/h}\left(-\Delta+q\right)u\right\|_{L^2(\Omega)}$$

□

1.3 Formules d'intégration par parties

On fait un rapide rappel de formules classiques, appelées formules de Green ou plus simplement formules d'intégration par parties. La démonstration de ces formules est donnée dans [18], nous nous contenterons donc de les énoncer.

Théorème 1.8. *Formules de Green :*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert à bord lisse, la normale ν extérieure à Ω existe en tout point de $\partial\Omega$ et on a les relations suivantes :

$$\forall u\,,\ v \in H^1(\Omega)\,,\ \forall i \in [|1,N|]\,,\ \int_\Omega \partial_i u\,v\,dx = -\int_\Omega u\partial_i v\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,\nu_i\,d\sigma(x)$$

$$\forall u \in H^2(\Omega)\,,\ \forall v \in H^1(\Omega)\,,\ \int_\Omega \Delta u\,v\,dx = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u\,v\,d\sigma(x)$$

$$\forall u\,,\ v \in H^2(\Omega)\,,\ \int_\Omega \left(\Delta u\,v - u\Delta v\right)\,dx = \int_{\partial\Omega} \left(\partial_\nu u\,v - u\partial_\nu v\right)\,d\sigma(x)$$

1.4 Opérateurs compacts

À moins de préciser le contraire, $E, F, G, H, \dots$ désigneront (dans cette sous-partie tout du moins) des espaces de Banach. Rappelons quelques définitions fondamentales et des résultats généraux de compacité :

Définition 1.1. *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Alors on dit que :*
- *A est relativement compacte dans X si $\overline{A}$ est compacte dans X*
- *A est précompacte dans X si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ x_1, x_2, \dots, x_N \in A \text{ tels que } A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}(x_i, \epsilon)$$

Ces deux définitions sont liées par la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Si A est relativement compacte dans X alors A est précompacte dans X. Il y a même équivalence des définitions si (X, d) est un espace complet.*

Démonstration.
- Si A est relativement compacte dans X, alors $\overline{A}$ est compacte dans X et si $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, x_2, \dots, x_N \in \overline{A}$ tels que $\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}(x_i, \epsilon)$. Quitte à doubler ϵ, on peut même choisir les x_i dans A. Donc $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ x_1, x_2, \dots, x_N \in A$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}(x_i, \epsilon)$.
- Respectivement, si X est complet et A est précompacte, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut recouvrir A par des boules de rayon $\epsilon_m = 2^{-1}$, alors si $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ il existe une boule $\mathcal{B}_1$ de rayon $1/2$ (faisant partie d'un recouvrement de A) qui contient une infinité de termes de la suite, c'est-à-dire qu'il existe une extractrice φ_1 telle que $\forall n \mathbb{N}, x_{\varphi_1(n)} \in \mathcal{B}_1$. De même il existe une boule $\mathcal{B}_2$ de rayon $1/4$ telle que $\mathcal{B}_2$ contienne une infinité de termes de la suite $(x_{\varphi_1(n)})_n$ ce qui donne une sous-suite $(x_{\varphi_2(n)})_n$ entièrement contenue dans une boule de rayon 2^{-2}. En itérant le procédé, on construit par extraction diagonale pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ une sous-suite $(x_{\varphi_m(n)})_n$ contenue dans une boule de rayon 2^{-m}. On peut donc extraire une suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ qui soit de Cauchy dans X, et donc convergente vers $x \in \overline{A}$ car X est complet. Ainsi, $\overline{A}$ est compacte (séquentiellement) et par Bolzano-Weierstrass, $\overline{A}$ est compacte.

$\square$

On définit maintenant la notion d'opérateur compact :

Définition 1.2. *Opérateur compact :*
Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que T est un opérateur compact de E dans F si $T(\overline{\mathcal{B}}_E)$ est relativement compact dans F, c'est-à-dire que T envoie tout borné de E sur un relativement compact de F.
On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'espace vectoriel des opérateurs compacts de E dans F.

Remarquons une propriété simple mais très utile de cette classe d'opérateurs :

Proposition 1.4. *Soient $S_1 \in \mathcal{L}(G, H)$, $S_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{K}(F, G)$,*
Alors $\widetilde{T} = S_1 \circ T \circ S_2 \in \mathcal{K}(E, H)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$ la boule unité ouverte de E, S_2 étant continue, $S_2(\mathcal{B})$ est un borné de F. T étant compact de F dans G, $T \circ S_2(\mathcal{B})$ est relativement compact dans G : $\overline{T \circ S_2(\mathcal{B})}$ est compact dans G. Par continuité de S_1, la compacité est préservée et $\overline{\widetilde{T}(\mathcal{B})}$ est compact dans H. $\square$

Nous aurons besoin de caractériser les parties relativement compactes de $L^p(\mathbb{R}^N)$ au moyen du théorème suivant :

Théorème 1.9. *Caractérisation des relativement compacts de $L^p(\mathbb{R}^N)$:*
Soit $A \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, A est relativement compacte dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si :
- *A est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^N)$*
- $\int_{|x|>R} |f|^p \, dx \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$ *uniformément en $f \in A$*
- $\tau_a f \xrightarrow[|a| \to 0]{} f$ *uniformément en $f \in A$*

Remarquons que par le théorème de Riesz-Fischer, l'espace $L^p(\mathbb{R}^N)$ est complet et que donc relative compacité et précompacité sont des notions équivalentes.

Démonstration. On notera par la suite p' l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
• Supposons dans un premier temps A précompacte. On considère $\epsilon > 0$ et $f_1, ..., f_k \in A$ donnés par le recouvrement

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}(f_i, \epsilon)$$

Alors immédiatement, A est bornée.

De plus, on a $p.p.\, x \in \mathbb{R}^N$ et $j \in [|1,k|]$: $|f_j(x)\mathbf{1}_{\{|x|>R\}}| \leq \sup_{1\leq j\leq k} \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

et par convergence dominée on obtient

$$\exists R_0 > 0,\, \forall j \in [|1,k|] \text{ et } \forall R > R_0,\, \left(\int_{|x|>R} |f_j|^p\, dx\right)^{1/p} < \epsilon$$

et donc en remarquant que pour tout $f \in A$ il existe $j_0 \in [|1,k|]$ tel que f_{j_0} soit à distance au plus ϵ de f, on a

$$\exists R_0 > 0,\, \forall R > R_0 \text{ et } \forall f \in A,\, \left(\int_{|x|>R} |f|^p\, dx\right)^{1/p} < 2\epsilon$$

Donc $\int_{|x|>R} |f|^p\, dx$ tend vers 0 uniformément en f quand $R \to +\infty$.
Enfin, si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, l'application $a \in \mathbb{R}^N \mapsto \tau_a f = f(\cdot - a)$ est uniformément continue (voir pour cela [7]) donc $\exists \eta > 0$ tel que

$$\forall |a| < \eta \;\; \forall j \in [|1,k|]\,,\; \|\tau_a f_j - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} \forall |a| < \eta \text{ et } \forall f \in A\,,\; \|\tau_a f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\tau_a f_{j_0} - f_{j_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_a f - \tau_a f_{j_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + \|f_{j_0} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq 3\epsilon \end{aligned}$$

Ce qui prouve le dernier point.
• Réciproquement, supposons les 3 propriétés satisfaites pour une certaine partie $A \subset L^p(\mathbb{R}^N)$. Fixons $\epsilon > 0$, alors par la deuxième propriété, il existe $R > 0$ tel que

$$\forall f \in A\,,\; \left(\int_{|x|>R} |f|^p\, dx\right)^{1/p} < \epsilon$$

Considérons une approximation de l'identité $(\phi_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $supp(\phi_n) \subset \mathcal{B}(0, 1/n)$ et $\|\phi_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} = 1$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; \forall f \in A\,,\; \|f - f * \phi_n\|_{L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \leq \sup_{|y|\leq 1/n} \|f - \tau_y f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \epsilon \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\; \forall f \in A\,,\; \|f - f * \phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \leq \epsilon$$

De plus, si $x, x' \in \mathbb{R}^N$ et $f \in A$ sont quelconques, on a :

$$\begin{aligned} |f * \phi_{n_0}(x) - f * \phi_{n_0}(x')| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(x-y) - f(x'-y))\, \phi_{n_0}(y)\, dy\right| \\ &\leq \left\|\tau_x \check{f} - \tau_{x'} \check{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\phi_{n_0}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \quad \text{par Hölder} \\ &\leq \|\tau_{x-x'} f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\phi_{n_0}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

et également

$$|f*\phi_{n_0}(x)| \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, \|\phi_{n_0}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$$

Si on note

$$\mathcal{P} := \{g = f*\phi_{n_0}{}_{\overline{\mathcal{B}}(0,R)}\,,\ f\in A\} \subset \mathcal{C}(\overline{\mathcal{B}}(0,R))$$

alors d'une part, la première propriété donne que chaque

$$\mathcal{P}_x := \{g(x), g\in\mathcal{P}\}$$

est borné, donc relativement compact en dimension finie.
D'autre part en utilisant encore l'uniforme continuité de $a\in\mathbb{R}^N \mapsto \tau_a f = f(\cdot - a)$, on peut conclure quant à l'équicontinuité de $\mathcal{P}$.
Par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{P}$ est une partie relativement compacte et donc précompacte de $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{B}}(0,R))$.
Ainsi, on a l'existence d'une famille finie $f_1,...,f_k\in A$ qui forme un recouvrement associé à $\epsilon\lambda\left(\overline{\mathcal{B}}(0,R)\right)^{-1/p}$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire :

$$\forall f\in A\,,\ \exists j_0\in[|1,k|]\,,\ \forall x\in\overline{\mathcal{B}}(0,R)\,,\ |f*\phi_{n_0}(x) - f_{j_0}*\phi_{n_0}(x)| \le \epsilon\lambda\left(\overline{\mathcal{B}}(0,R)\right)^{-1/p}$$

Alors en appliquant l'inégalité triangulaire, pour presque tout $x\in\mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}
|f(x)-f_j(x)| &\le |f(x) - f*\phi_{n_0}(x)| + |f_j(x) - f_j*\phi_{n_0}(x)| + |f*\phi_{n_0}(x) - f_j*\phi_{n_0}(x)| \\
&\le |f(x) - f*\phi_{n_0}(x)| + |f_j(x) - f_j*\phi_{n_0}(x)| \\
&\quad + \mathbf{1}_{|x|\le R}(x)\,|f*\phi_{n_0}(x) - f_j*\phi_{n_0}(x)| + \mathbf{1}_{|x|>R}(x)\,|f*\phi_{n_0}(x) - f_j*\phi_{n_0}(x)| \\
&\le |f(x) - f*\phi_{n_0}(x)| + |f_j(x) - f_j*\phi_{n_0}(x)| \\
&\quad + \mathbf{1}_{|x|\le R}(x)\,|f*\phi_{n_0}(x) - f_j*\phi_{n_0}(x)| + \mathbf{1}_{|x|>R}(x)\,(|f(x)| + |f_j(x)|)
\end{aligned}$$

puis en passant à la norme $L^p(\mathbb{R}^N)$ on obtient que pour tout $f\in A$, il existe $j\in[|1,k|]$ tel que

$$\begin{aligned}
\|f-f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\le \|f - f*\phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|f_j - f_j*\phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \left(\int_{|x|>R}|f|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\int_{|x|>R}|f_j|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_{|x|\le R}|f*\phi_{n_0} - f_j*\phi_{n_0}|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\le \|f - f*\phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|f_j - f_j*\phi_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \left(\int_{|x|>R}|f|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\int_{|x|>R}|f_j|^p\,dx\right)^{1/p} + \lambda(\overline{\mathcal{B}}(0,R))^{1/p}\sup_{\overline{\mathcal{B}}(0,R)}|f*\phi_{n_0} - f_j*\phi_{n_0}| \\
&\le 5\epsilon
\end{aligned}$$

Ce qui montre la précompacité de A et achève la preuve du théorème. □

Les deux lemmes qui suivent n'utilisent en rien la compacité mais se révéleront utiles dans la preuve du thérème de Rellich.

Lemme 1.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f\in H_0^1(\Omega)$, notons $\tilde f$ le prolongement par 0 de f sur Ω^c. Alors l'application*

$$\Psi : f\in H_0^1(\Omega) \mapsto \tilde f\in H^1(\mathbb{R}^N)$$

est une isométrie de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. On raisonne par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ en montrant que Ψ est une isométrie de $\left(\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\right)$ dans $\left(H^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right)$.
Soit $f\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\tilde f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et *supp*$(\tilde f)\subsetneq\Omega$. Donc f (respectivement ∇f) et $\tilde f$ (respectivement $\nabla\tilde f$)

coincident sur Ω et $\tilde{f}$ et $\nabla\tilde{f}$ sont nuls à l'extérieur de Ω. Ainsi

$$\begin{aligned}
\|\Psi(f)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \left\|\tilde{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left\|\nabla\tilde{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \left\|\tilde{f}\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla\tilde{f}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|f\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc Ψ est bien une isométrie de $\left(\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}\right)$ dans $\left(H^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right)$ et la complétude de $\left(H^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\right)$ permet de prolonger Ψ en une unique isométrie de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ munis des normes habituelles. $\square$

Lemme 1.2.

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ et } h \in \mathbb{R}^N, \ \|\tau_h u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq |h| \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Démonstration. Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, il suffit de montrer le résultat pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Soit donc $h \in \mathbb{R}^N$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ quelconques :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^N, \ u(x-h) - u(x) &= -\int_0^1 \nabla u(x-th) \cdot h \, dt \\
\Rightarrow |u(x-h) - u(x)|^2 &\leq |h|^2 \int_0^1 |\nabla u(x-th)|^2 \, dt \\
\text{et en intégrant sur } \mathbb{R}^N, \ \|\tau_h u - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-h) - u(x)|^2 \, dx \leq |h|^2 \, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

$\square$

On a maintenant tout le matériel nécessaire pour établir le théorème de Rellich, un résultat fondamental pour la suite :

Théorème 1.10. *Théorème de Rellich :*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors l'injection $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.

Démonstration. Pour montrer la compacité de $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, il suffit de montrer que l'injection $u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est compacte, on conclut ensuite par composition avec l'application linéaire continue $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \mapsto u_{|\Omega} \in L^2(\Omega)$.
Notons $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}_{H_0^1(\Omega)}$ la boule unité fermée de $H_0^1(\Omega)$ et $\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{\widetilde{f}, \ f \in \mathcal{B}\right\}$. Alors, par le lemme 1.1, $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{B}}_{H^1(\mathbb{R}^N)}$. Montrons que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est relativement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Pour ce faire on utilise la caractérisation du théorème 1.9 pour $p = 2$:
$\widetilde{\mathcal{B}}$ est effectivement une partie bornée de $L^2(\mathbb{R}^N)$ car $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\cdot\|_{H^1}(\mathbb{R}^N)$ et $\widetilde{\mathcal{B}}$ est bornée pour la norme $H^1(\mathbb{R}^N)$.

$$\text{De plus, pour toute fonction } \widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{B}} \text{ et tout } R > 0 \text{ vérifiant } \Omega \subset \mathcal{B}(0,R), \quad \int_{|x|>R} |\widetilde{f}|^2 \, dx = 0$$

ce qui justifie le deuxième point.
Enfin, $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{B}}_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ donc $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ et alors

$$\forall f \in \widetilde{\mathcal{B}}, \ \forall a \in \mathbb{R}^N, \quad \|\tau_a f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq |h| \xrightarrow[|a| \to 0]{} 0 \quad \text{uniformément en } f$$

ce qui vérifie le troisième point et justifie que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une partie précompacte de $L^2(\mathbb{R}^N)$ et donc que $u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est un opérateur compact. On conclut alors que l'injection $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. $\square$

1.5 Analyse hilbertienne

Dans cette partie on énonce trois résultats spécifiques aux espaces de Hilbert largement utilisés en analyse : le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, le théorème de Hahn-Banach analytique et le théorème spectral. Notons que la preuve générale du second nécessite l'utilisation du lemme de Zorn, un élément dont on peut se passer dans le cas hilbertien.
On considère dans toute la suite un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Le principal argument facilitant le raisonnement dans un espace de Hilbert est le théorème du supplémentaire orthogonal qui permet la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$ si F est un sous-espace vectoriel fermé de H.

Théorème 1.11. *Théorème de représentation de Riesz :*
Soit $\varphi \in H'$ une forme linéaire continue sur H, il existe un unique vecteur $f \in H$ tel que :

$$\forall h \in H\,,\ \varphi(h) = \langle f\,,\, h \rangle$$

et de plus $\|\varphi\|_{H'} = \|f\|$.

Démonstration. Si $\varphi = 0$, le résultat est immédiat. Si on prend maintenant $\psi \in H'$, alors $Ker(\psi)$ est un sous-espace vectoriel fermé de H et $Ker(\psi)^{\perp}$ est de dimension 1. Donc $H = Ker(\psi) \oplus Ker(\psi)^{\perp}$ et $Ker(\psi) = \mathbb{R}e$ pour un certain vecteur unitaire $e \in H$. Posons $f = \psi(e)e$ et soit $h = h_1 + \lambda e \in H$ quelconque où $h_1 \in Ker(\psi)$, alors $\psi(h) = \langle f\,,\, h\rangle$ et $\|\psi\|_{H'} = \|f\|$. □

Théorème 1.12. *Théorème de Hahn-Banach analytique :*
Soit F un sous-espace vectoriel de H et $\psi \in F'$ alors il existe $\Psi \in H'$ tel que

$$\Psi_{|F} = \psi \quad \textit{et} \quad \|\Psi\|_{H'} = \|\psi\|_{F'}$$

Ce théorème est encore vrai si H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé quelconque, mais la preuve fait alors appel au lemme de Zorn, nous nous contenterons donc de la version hilbertienne.

Démonstration. Comme $\psi \in F'$, elle est uniformément continue sur F et se prolonge donc en une unique application linéaire continue sur $\overline{F}$, notée encore $\psi \in \overline{F}\,'$. $\overline{F}$ étant fermé, on peut lui appliquer le théorème du supplémentaire orthogonal et écrire $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^{\perp}$. On définit alors $\Psi \in H'$ par la formule :

$$\Psi : x = x_1 + x_2 \in H \mapsto \psi(x_1)$$

où $x = x_1 + x_2$ est une décomposition adaptée à l'écriture $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^{\perp}$.
Alors dans ces conditions $\Psi_{|F} = \psi$ et $\|\Psi\|_{H'} \geq \|\psi\|_{F'}$ et si $x = x_1 + x_2 \in H$ est une écriture adaptée, on a :

$$\begin{aligned} \|\Psi(x)\| &= \|\psi(x_1)\| \\ &\leq \|\psi\|_{\overline{F}'} \|x_1\| \\ &\leq \|\psi\|_{\overline{F}'} \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} \\ &= \|\psi\|_{\overline{F}'} \|x_1 + x_2\| \end{aligned}$$

Donc au final $\|\Psi\|_{H'} \leq \|\psi\|_{F'}$ et donc $\|\Psi\|_{H'} = \|\psi\|_{F'}$. □

On énonce pour finir le théorème spectral sur un espace de Hilbert, la preuve étant un peu fastidieuse et n'ayant que peu d'intéret pour la suite, on se référera à la démonstration donnée dans [3].

Théorème 1.13. *Théorème spectral :*
Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un Hilbert séparable sur $\mathbb{R}$ et si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur autoadjoint compact sur H alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ est au plus dénombrable et il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres pour T.

2 Alternative de Fredholm et équation de Schrödinger statique

Une équation interviendra de manière récurrente dans les chapitres suivants et nécessite donc, avant d'entreprendre des raisonnements sophistiqués, d'être étudiée de manière rigoureuse. Cette équation est appelée équation de Schrödinger stationnaire (ou indépendante du temps) :

$$-\Delta u + qu = 0$$

où $q \in L^\infty$ et on notera par la suite $A_q = -\Delta + q$.
Ce chapitre constitue une introduction à la théorie de Riesz-Fredholm pour mener à la résolution de l'équation de Schrödinger comme problème aux limites sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

2.1 Théorie de Riesz-Fredholm

Cette partie a pour but d'aboutir à un résultat fondamental : l'alternative de Fredholm, élément clé pour la résolution de l'équation de Schrödinger.

On va chercher à établir un résultat similaire à celui bien connu en dimension finie, à savoir l'équivalence entre injectivité et surjectivité, pour certains opérateurs. Ceci permet, entre autres, d'inverser l'opérateur de Schrödinger et de démontrer l'existence et l'unicité de la solution.
Établissons tout d'abord un lemme utile pour la suite :

Lemme 2.1. *Lemme de Riesz :*
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel strict fermé de E, alors :

$$\forall \epsilon \in]0,1[\,,\ \exists u \in E\,,\ \|u\| = 1 \text{ tel que } d(u,F) \geq 1 - \epsilon$$

Démonstration. Soit $0 < \epsilon < 1$ quelconque fixé et $v \in E \setminus F$, alors $d(v,F) > 0$. Soit $x_0 \in F$ tel que $d(v,F) \leq \|v - x_0\| \leq \frac{d(v,F)}{1-\epsilon}$ et posons $u = \frac{v - x_0}{\|v - x_0\|}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in F\,,\ \|u - x\| &= \left\| \frac{v - x_0}{\|v - x_0\|} - x \right\| = \left\| \frac{v - (x_0 + x\,\|v - x_0\|)}{\|v - x_0\|} \right\| \quad \text{et} \quad x_0 + x\,\|v - x_0\| \in F \text{ donc} \\ &\geq \left\| \frac{d(v,F)}{\|v - x_0\|} \right\| \geq 1 - \epsilon \end{aligned}$$

Donc u ainsi défini convient. □

Rappelons aussi, le théorème bien connu :

Théorème 2.1. *Théorème de compacité de Riesz :*
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé, E est de dimension finie si et seulement si $\overline{\mathcal{B}}_E$ la boule unité fermée est compacte.

Démonstration. L'implication directe est évidente par caractérisation des compacts en dimension finie. On raisonne par contraposée et on suppose que $dim(E) = +\infty$, montrons que $\overline{\mathcal{B}}_E$ est compacte. Soit $u_0 \in E$ tel que $\|u_0\| = 1$, en appliquant le lemme de Riesz à $F_0 = Vect(u_0)$ et $\epsilon = 1/2$, il existe $u_1 \in E$

unitaire tel que $d(u_1, F) \geq 1/2$.
En itérant la construction, on obtient $(u_k)_k \in \left(\overline{\mathcal{B}}_E\right)^{\mathbb{N}}$ et $(F_k)_k$ des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}\,,\; F_k = \langle u_k, u_{k-1}, ..., u_0 \rangle \;,\; F_k \subsetneq F_{k+1} \\ \qquad\qquad d(u_{k+1}, F_k) \geq 1/2 \end{cases}$$

Donc pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\|u_m - u_n\| \geq 1/2$, la suite $(u_k)_k$ n'admet donc pas de valeur d'adhérence. Ainsi, $\overline{\mathcal{B}}_E$ est non compacte. □

On a tous les éléments pour démontrer le résultat essentiel de cette partie :

Théorème 2.2. *Alternative de Fredholm :*
Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{K}(H)$, alors on a :
— *$Ker(Id - T)$ est de dimension finie*
— *$Im(Id - T)$ est fermé et $Im(Id - T) = Ker(Id - T^*)^{\perp}$*
— *$Ker(Id - T) = \{0\} \Leftrightarrow Im(Id - T) = H$*

Démonstration.

— T étant un opérateur compact de H, il envoie tout borné sur un relativement compact. En particulier, $T(B_H)$ est relativement compact dans H. De plus, en notant $E = Ker(Id - T)$, on a $B_E \subset T(B_H)$ et B_E est fermée dans H. Ainsi, B_E est compacte et par le théorème de compacité de Riesz, E est de dimension finie.

— Soit une suite $(x_n)_n$ d'éléments de H telle que $((Id-T)x_n)_n$ converge vers $y \in H$. Montrons que $y \in Im(Id - T)$:
Soit $d_n = d(x_n, Ker(Id - T))$, comme $Ker(Id - T)$ est de dimension finie, d_n est atteinte en un unique vecteur $v_n \in Ker(Id - T)$. On a alors $(Id - T)x_n = (x_n - v_n) - T(x_n - v_n)$ et $d_n = \|x_n - v_n\|$.
Supposons par l'absurde qu'on ait une extractrice $(n_k)_k$ telle que $d_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$:
alors en posant $w_{n_k} = \frac{x_{n_k} - v_{n_k}}{\|x_{n_k} - v_{n_k}\|}$ (bien définie au moins à partir d'un certain rang), on a :

$$\|x_{n_k} - v_{n_k}\|\,(Id - T)w_{n_k} = (Id - T)x_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} y \quad \text{et donc} \quad (Id - T)w_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

À extraction près on peut supposer que $(T(w_{n_k}))_k$ converge vers $z \in H$ et donc $w_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} z$ et $z \in Ker(Id - T)$.
Or, $d(w_{n_k}, Ker(Id - T)) = \frac{d(x_{n_k}, Ker(Id-T))}{\|x_{n_k} v_{n_k}\|} = 1$ car $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in Ker(Id - T)$.
En passant à la limite sur k, on obtient que $d(z, Ker(Id - T)) = 1 \neq 0$ ce qui est absurde. Donc la suite $(\|x_n - v_n\|)_n$ est bornée.
T étant un opérateur compact de H, on peut extraire une sous-suite $(\|x_{n_k} - v_{n_k}\|)_k$ qui converge vers un vecteur $z \in H$. Notons également que $(Id - T)x_{n_k} = x_{n_k} - v_{n_k} - T(x_{n_k} - v_{n_k})$ et donc $x_{n_k} - v_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} y + z$.
En posant $f = y + z$, on a $(Id - T)f = y$ et finalement $y \in Im(Id - T)$.
On vient de montrer que $Im(Id - T)$ était fermé, il est donc immédiat que

$$\left(Im(Id - T)^{\perp}\right)^{\perp} = Im(Id - T) = Ker(Id - T^*)^{\perp} \quad \text{et donc} \quad Ker(Id - T^*) = (Im(Id - T))^{\perp}$$

— • Suposons dans un premier temps que $Ker(Id - T) = \{0\}$:
On pose pour $n \in \mathbb{N}, E_n = (Id - T)^n H$ et on peut noter que chaque E_n est fermé par ce qui précède et que la suite $(E_n)_n$ ainsi formée est décroissante au sens de l'inclusion.
Supposons par l'absurde que cette suite est strictement décroissante, alors par le lemme de Riesz il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, E_{n+1}) > 2$.
Soient $m < n \in \mathbb{N}$, on a

$$T(x_n - x_m) = -(x_n - Tx_n) + (x_m - Tx_m) + (x_n - x_m) \quad \text{et} \quad E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$$

alors $y_{m,n} = -(x_n - Tx_n) + (x_m - Tx_m) + x_n \in E_{m+1}$ et comme $d(x_m, E_{m+1}) > 1/2$,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|y_{m,n} - x_m\| > 1/2$$

ce qui contredit la compacité de T.
Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $E_{n_0} = E_{n_0+1}$. Nous montrons maintenant que $E_1 = H$:
Supposons par l'absurde que $E_1 \neq H$, soit m le plus petit entier tel que $E_m = E_{m+1}$ et $y \in E_{m-1} \setminus E_m$. Alors $(Id - T)y \in E_m = E_{m+1}$ et dans ces conditions

$$\exists z \in E_m\,,\ (Id - T)y = (Id - T)z \quad \text{avec} \quad y \neq z$$

Donc $y - z \in Ker(Id - T)$ et $y - z \neq 0$ ce qui est impossible par injectivité de $Id - T$.
Donc $Im(Id - T) = H$ et $Id - T$ est surjectif.
• Réciproquement supposons $Im(Id - T) = H$:
alors

$$Ker(Id - T^*) = Im(Id - T)^\perp = \{0\}$$

et comme $T^* \in \mathcal{K}(H)$, on a par ce qui précède que $Im(Id - T^*) = H$ et donc

$$Ker(Id - T) = Im(Id - T^*)^\perp = \{0\}$$

□

2.2 Équation de Schrödinger

Posons de manière rigoureuse le problème qui va nous intéresser :
Soient un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, une fonction $q \in L^\infty(\Omega)$ et une fonction $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.
On considère le problème avec conditions aux limites suivant :

$$\begin{cases} A_q u = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2.2.1 Cas $q = 0$

Simplifions dans un premier temps la question et prenons $q = 0$, on est ramené au problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Par surjectivité de l'opérateur de trace, on peut considérer $F \in H^1(\Omega)$ une extension de f, c'est-à-dire telle que $F_{|\partial\Omega} = f$. Notons qu'alors, si une solution u existe, on aura $(u - F)_{|\partial\Omega} = 0$.
De plus, si $v = u - F$ et $g = \Delta F \in H^{-1}(\Omega)$, le problème 2.3 est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta v = g \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.2}$$

où l'égalité a lieu au sens faible (c'est-à-dire au sens des formes linéaires sur $H_0^1(\Omega)$).
On cherche donc les fonctions $v \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifient $-\Delta v = g$ dans $H^{-1}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & -\Delta v = g \quad \text{dans}\, H^{-1}(\Omega) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ -(v, \Delta\varphi)_{H^1(\Omega)} = g(\varphi) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ (\nabla v, \nabla\varphi)_{L^2(\Omega)} = g(\varphi) \quad \text{en intégrant par parties} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \int_\Omega \nabla v \cdot \overline{\nabla\varphi}\, dx = g(\varphi) \end{aligned}$$

Pour conclure quant à l'existence et l'unicité de v, on va utiliser le théorème de Riesz. Il faut néanmoins s'assurer d'une part que

$$\alpha : u, v \in H_0^1(\Omega) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\, dx$$

définit bien un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ et que g est continue pour la norme associée à α :

$$u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

α est clairement une forme hermitienne, sesquilinéaire. Le caractère défini positif est donné par l'inégalité de Poincaré :
Si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\
&= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{C}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0
\end{aligned}$$

où $C > 0$ est donnée par l'inégalité de Poincaré. Ce qui termine de justifier que α est bien un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$.
De plus toujours avec Poincaré, on a équivalence des normes $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\nabla\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ sur $H_0^1(\Omega)$:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \qquad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (C+1)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq (C+1)\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi, g est une forme linéaire continue pour la norme associée au produit scalaire α sur $H_0^1(\Omega)$ et en appliquant le théorème de représentation de Riesz, on obtient l'existence et l'unicité d'une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de

$$-\Delta v = g \quad \text{sur} \quad \Omega$$

et cette solution vérifie de plus $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$.

En fait, on a montré que $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ est un opérateur inversible.
Notons $\mathrm{T}= (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, alors la solution à

$$\begin{cases} -\Delta v = g \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

est donnée par $v = \mathrm{T}g$. Et donc, par construction, le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ donnée par

$$u = F + \mathrm{T}(\Delta F) \quad \text{où } F \text{ est n'importe quelle extension de} f$$

L'indépendance de u vis-à-vis de l'extension est directe car si F, G sont deux extensions $H^1(\Omega)$ de f, alors $F+\mathrm{T}(\Delta F) - G-\mathrm{T}(\Delta G)$ vérifie

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et par unicité $0 = F+\mathrm{T}(\Delta F) - G-\mathrm{T}(\Delta G)$ et donc $F+\mathrm{T}(\Delta F) = G+\mathrm{T}(\Delta G)$.

On a donc montré que le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet toujours une solution $u \in H^1(\Omega)$.
On a également le corollaire suivant, utile pour la suite :

Corollaire 2.1.

$$\textit{L'opérateur} \qquad (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega)$$
$$g \mapsto v \qquad \textit{tel que} - \Delta v = g$$

est bien défini et continu de norme inférieure à la constante apparaissant dans l'inégalité de Poincaré.

Démonstration. La bonne définition résulte directement du travail précédent car $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Pour la continuité, il suffit de prendre $g \in L^2(\Omega)$ et :

$$\begin{aligned}
\left\|(-\Delta)^{-1}g\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \left|\left(\nabla(-\Delta)^{-1}g, \nabla(-\Delta)^{-1}g\right)_{L^2(\Omega)}\right| \\
&= \left|\left(g, (-\Delta)^{-1}g\right)_{L^2(\Omega)}\right| \\
&\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \left\|(-\Delta)^{-1}g\right\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{par Cauchy-Shwarz} \\
&\leq C\|g\|_{L^2(\Omega)} \left\|(-\Delta)^{-1}g\right\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\text{Ce qui donne} \quad \left\|(-\Delta)^{-1}g\right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

□

2.2.2 Cas $q \in L^\infty(\Omega)$

Le cas où le terme de potentiel est non nul demande une méthode totalement différente, s'appuyant sur la théorie des opérateurs compacts. Soit $q \in L^\infty(\Omega)$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = 0 & \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

L'étude menée précédemment permet de choisir une extension $F \in H^1(\Omega)$ de f qui soit harmonique, c'est-à-dire une fonction $F \in H^1(\Omega)$ telle que $F_{|\partial\Omega} = f$ sur $\partial\Omega$ et $\Delta F = 0$ sur Ω.
Alors le problème 2.3 est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta v + qv = g & \text{sur } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.4}$$

où $g = -qF$ et avec $v = u - F$.
Notons toujours T$= (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, alors l'équation se réecrit :

$$\begin{aligned}
& -\Delta v + qv = g \\
\Leftrightarrow \quad & v + \mathrm{T}(qv) = \mathrm{T}g \\
\Leftrightarrow \quad & (Id + \mathrm{T}(q\cdot))v = \mathrm{T}g
\end{aligned}$$

(remarquons que Tg est bien défini car $g = qF \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$)
La résolution de l'équation revient donc à inverser l'opérateur Id+T$(q\cdot)$ dans $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$. La méthode habituelle serait d'utiliser la série de Neumann :

$$(1 + X)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(-X)^n$$

mais celle ci ne converge que pour $\|X\| < 1$, alors que q est seulement L^∞.
Pour palier à cette difficulté, on va utiliser l'alternative de Fredholm.

Cependant il reste à montrer que T$(q\cdot)$ est un opérateur compact sur $H_0^1(\Omega)$. Comme $q \in L^\infty(\Omega)$, la multiplication par q conserve les bornés de $H_0^1(\Omega)$, il suffit donc uniquement de montrer que l'opérateur T: $H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ est compact.
Pour ce faire, on considère l'opérateur $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ défini au corollaire 2.1 dont on a

montré qu'il était continu.
On peut donc écrire

$$\mathrm{T} = (-\Delta)^{-1} \circ \iota$$

où $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est l'injection canonique.
Or par le théorème de Rellich, l'injection ι est compacte. Par composition par un opérateur continu, T est bien un opérateur compact.
On peut donc appliquer l'alternative de Fredholm. On résume ceci dans le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Si $q \in L^\infty(\Omega)$ est tel que 0 n'est pas valeur propre de Dirichlet de $A_q = -\Delta + q$, alors le problème 2.3 admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.*

Démonstration. Le travail précédent permet de dire que la résolution de ce problème est équivalente à l'inversibilité de l'opérateur $Id{+}\mathrm{T}(q\cdot)$ dans $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$. Ayant montré la compacité de l'opérateur T$\in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$, il suffit de montrer l'injectivité de $Id{+}\mathrm{T}(q\cdot)$ pour en obtenir l'inversibilité par l'alternative de Fredholm.
On considère donc le problème

$$\begin{cases} A_q u = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \qquad u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

qui admet la fonction nulle pour unique solution car on a supposé que 0 n'était pas valeur propre de Dirichlet de A_q. Alors pour $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$u + \mathrm{T}(qu) = 0 \Leftrightarrow A_q u = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Ce qui montre que $Id{+}\mathrm{T}(q\cdot)$ est injectif, et donc inversible. De fait, le problème 2.4 admet une unique solution donnée par $v = (Id{+}\mathrm{T}(q\cdot))^{-1}(\mathrm{T}(-qF)) \in H_0^1(\Omega)$.
La solution u de 2.3 est donc unique et donnée par $u = v + F$.

□

Comme conclusion de cette partie, et parce que c'est ce résultat qui nous sera utile par la suite, on retiendra le théorème suivant conséquence directe du travail qui vient d'être effectué :

Théorème 2.4. *Équation de Schrödinger :*
Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ tel que 0 ne soit pas valeur propre de Dirichlet de A_q, alors les problèmes

$$\begin{cases} A_q u = 0 \quad \textit{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \quad \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_q v = F \quad \textit{sur } \Omega \\ \qquad v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où $f \in H^{1/2}(\Omega)$ et $F \in H^{-1}(\Omega)$ sont deux formulations équivalentes d'un même problème qui admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ (respectivement $v \in H_0^1(\Omega)$). De plus, u et v dépendent continument des seconds membres f et F, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ qui dépendent de Ω et de q telles que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad \textit{et} \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

Remarquons que les mêmes inégalités sont encore valables si on augmente la régularité de f et de F, c'est-à-dire :

Théorème 2.5. *Équation de Schrödinger :*
Soit Ω un ouvert à bord lisse et $q \in L^\infty(\Omega)$ tel que 0 ne soit pas valeur propre de Dirichlet de A_q, alors le problème aux limites :

$$\begin{cases} A_q u = F \quad \textit{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \quad \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $f \in H^{3/2}(\Omega)$ et $F \in L^2(\Omega)$ admet une unique solution $u \in H^2(\Omega)$ et cette solution vérifie

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_{\Omega,q} \left(\|f\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} + \|F\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

où $c_{\Omega,q}$ est une constante strictement positive qui ne dépend que de Ω et q.

3 Le problème inverse de Calderòn, $N \geq 3$

On se propose d'étudier le problème dit de Calderòn. Ce problème d'origine physique consiste en la détermination de la conductivité γ à l'intérieur d'un corps Ω par des mesures de tension u à sa surface en le stimulant par une intensité f. La tension u vérifie une équation de type divergence qui conduit à la modélisation mathématique suivante :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné à bord lisse (le corps), $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$ une fonction strictement positive (la conductivité) et $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ (l'intensité). Alors la tension $u \in H^1(\Omega)$ vérifie

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 \ sur \ \Omega \\ \quad u_{|\partial\Omega} = f \end{cases} \tag{3.1}$$

La mesure de la tension due à l'intensité se fait via l'application de Dirichlet-à-Neumann :

$$\Lambda_\gamma : f \mapsto \gamma \partial_\nu u_{|\partial\Omega} \quad \text{où } \nu \text{ désigne la normale extérieure à } \Omega$$

Le problème tel qu'il est posé par Calderòn est celui de la détermination de γ à partir de Λ_γ que l'on peut décomposer en plusieurs sous-problèmes (identifiabilité, stabilité, reconstruction ...). Nous nous intéresserons ici au problème de l'identifiabilité, c'est-à-dire de l'injectivité de l'application $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$.

3.1 Réduction à Schrödinger et application Dirichlet-à-Neumann

L'hypothèse faite sur γ n'est pas anodine puisqu'elle permet de se ramener à une équation du type Schrödinger, plus simple à manipuler dans la mesure où elle ne fait pas intervenir de terme d'ordre 1. En effet, en reprenant les notations précedentes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) &= \gamma \Delta u + \nabla \gamma \cdot \nabla u \\ &= \sqrt{\gamma} \left(\sqrt{\gamma} \Delta u + \frac{2 \nabla \gamma}{2\sqrt{\gamma}} \cdot \nabla u \right) \\ &= \sqrt{\gamma} \left(\Delta(\sqrt{\gamma} u) - \sqrt{\gamma} u \frac{\Delta \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \right) \\ &= -\sqrt{\gamma} \left(-\Delta + q \right) \left(\sqrt{\gamma} u \right) \text{ où } q = \frac{\Delta \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \end{aligned}$$

Cette réduction n'est possible que si γ est strictement positive et au moins C^2, et dans ces conditions $q \in L^\infty(\Omega)$.
Faisons l'hypothèse supplémentaire que 0 n'est pas valeur propre de Dirichlet de $A_q = -\Delta + q$, alors on est ramené au probème de Dirichlet avec $v = \sqrt{\gamma} u \in H^1(\Omega)$ et $g = \sqrt{\gamma} f$:

$$\begin{cases} (-\Delta + q) v = 0 \ sur \ \Omega \\ \qquad v_{|\partial\Omega} = g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \end{cases} \tag{3.2}$$

Par l'étude déjà menée précédemment sur l'équation de Schrödinger (théorème 2.4) , la solution v est unique, de même que u. De cette façon, l'application Dirichlet-à-Neumann Λ_γ associée au problème (3.1) est définie sans ambiguïté :

$$\begin{aligned} \Lambda_\gamma : H^{1/2}(\partial\Omega) &\to H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ f &\mapsto \gamma \partial_\nu u_{|\partial\Omega} \end{aligned}$$

On définit de même l'application Dirichlet-à-Neumann associée au problème (3.2) notée également Λ_q :

$$\begin{array}{rcl}\Lambda_q : H^{1/2}(\partial\Omega) & \to & H^{-1/2}(\partial\Omega)\\ g & \mapsto & \partial_\nu v_{|\partial\Omega}\end{array}$$

Où ν désigne la normale extérieure à Ω.

Ayant effectué cette réduction, on peut lier les applications de Dirichlet-à-Neumann correspondant aux deux problèmes par le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Si $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$ est strictement positive et que 0 n'est pas valeur propre de Dirichlet de A_q où $q = \frac{\Delta(\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\gamma}}$, alors*

$$\forall g \in H^{1/2}(\partial\Omega)\,,\ \Lambda_q g = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\Lambda_\gamma(\gamma^{-1/2}g) + \frac{\partial_\nu\gamma}{2\gamma}g$$

Démonstration. Soit $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, avec les hypothèses sur γ, si $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, on peut écrire $g = \sqrt{\gamma}f$ et donc :

$$\begin{array}{rcl}\Lambda_q(\sqrt{\gamma}f) = \partial_\nu(\sqrt{\gamma}v)_{|\partial\Omega} & = & \dfrac{\partial_\nu\gamma}{2\sqrt{\gamma}}v_{|\partial\Omega} + \sqrt{\gamma}\partial_\nu v_{|\partial\Omega}\\ & = & \dfrac{\partial_\nu\gamma}{2\sqrt{\gamma}}_{|\partial\Omega}f + \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}_{|\partial\Omega}\Lambda_\gamma f\end{array}$$

□

On peut donc passer librement de l'équation de la conductivité à celle de Schrödinger si on connait γ et $\partial_\nu\gamma$ au bord (remarquons que cette condition n'est pas contraignante car l'égalité $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ implique l'égalité au bord (voir [10])).
On a défini l'objet Λ_q pour $q \in L^\infty(\Omega)$ sans vraiment l'étudier rigoureusement. Remarquons que si l'hypothèse sur A_q qui dit que 0 n'est pas valeur propre de Dirichlet est vérifée, alors le problème suivant :

$$\begin{cases}(-\Delta + q)u = 0 \ sur\ \Omega\\ \qquad u_{|\partial\Omega} = f \in H^{1/2}(\partial\Omega)\end{cases} \tag{3.3}$$

admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ qui vérifie $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$.

Notons que comme $u \in H^1(\Omega)$, on a $\Delta u \in H^{-1}(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega)\right)'$ et que donc le fait que u soit solution de 3.3 est à interpréter au sens faible, c'est-à-dire :

$$\forall\phi \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\phi + qu\phi)\ dx = 0 \quad \text{et} \quad u_{|\partial\Omega} = f$$

Si $u \in H^2(\Omega)$, on peut appliquer les formules de Green pour obtenir :

$$\begin{array}{rcl}\forall v \in H^1(\Omega)\,,\ (\Lambda_q f, v)_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u\, v\ d\sigma(x) & = & \displaystyle\int_\Omega \Delta u\, v\ dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx\\ & = & \displaystyle\int_\Omega qu\, v\ dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx\end{array}$$

Dans le cas où u est moins régulière, on définit de la même façon :

Définition 3.1. *Application Dirichlet-à-Neumann :*
L'application Dirichlet-à-Neumann $\Lambda_q : H^{1/2}(\partial\Omega) \mapsto H^{-1/2}(\partial\Omega)$ associée à (3.3) est définie sans ambiguïté par :

$$\forall f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)\,,\ \Lambda_q f(g) := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + quv)\ dx$$

où $u \in H^1(\Omega)$ est l'unique solution de 3.3 et $v \in H^1(\Omega)$ est n'importe quelle extension de g dans $H^1(\Omega)$. De plus, on a :

$$\forall f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)\,,\ \Lambda_q f(g) = \Lambda_q g(f)$$

Démonstration. u étant une solution faible de 3.3, il est immédiat que

$$\forall \phi \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi + qu\phi)\ dx = 0$$

Donc si v et $\tilde{v}$ sont deux prolongements $H^1(\Omega)$ de g on a $\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + quv)\ dx = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \tilde{v} + qu\tilde{v})\ dx$ car $v - \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$: $\Lambda - q$ est bien définie.
De plus

$$|\Lambda_q f(g)| \le \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v + quv|\ dx \le (1 + \|q\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \le C' \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

La linéarité en g est évidente et donc $\Lambda_q f$ est bien une forme linéaire continue sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Enfin, remarquons que v solution de 3.3 avec condition au limite g est une extension $H^1(\Omega)$ de g et que dans ces conditions

$$\Lambda_q f(g) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + quv)\ dx = \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + qvu)\ dx = \Lambda_q g(f)$$

□

3.2 Théorème de Sylvester et Uhlmann

Avec les préparatifs réalisés précédemment, nous pouvons énoncer le théorème qui sera au centre de ce chapitre :

Théorème 3.1. *Théorème de Sylvester et Uhlmann :*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \ge 3$ un ouvert borné à bord lisse. Soient q_1 , $q_2 \in L^\infty(\Omega)$ tels que 0 n'est pas valeur propre de Dirichlet de A_{q_1} et A_{q_2}. Alors

$$\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2} \Rightarrow q_1 = q_2$$

Ce théorème permet de résoudre l'identifiabilité de q pour l'équation de Schrödinger (l'hypothèse $N \ge 3$ est nécessaire dans la démonstration présentée, pour le cas $N = 2$ on pourra consulter [4]).
En exploitant la réduction faite au début de ce chapitre, on peut énoncer le corollaire suivant comme conséquence immédiate du théorème 3.1.

Corollaire 3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \ge 3$ un ouvert borné à bord lisse. Soient γ_1 , $\gamma_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ deux fonctions strictement positives telles que 0 n'est pas valeur propre de Dirichlet de A_{q_1} et A_{q_2} où q_1, q_2 sont définis comme précédemment $q_1 = \frac{\Delta(\sqrt{\gamma_1})}{\sqrt{\gamma_1}}$ et $q_2 = \frac{\Delta(\sqrt{\gamma_2})}{\sqrt{\gamma_2}}$. Alors*

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$$

Démonstration. Par la remarque faite au lemme 3.1, $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ implique que $\gamma_{1|\partial\Omega} = \gamma_{2|\partial\Omega}$ et que $\partial_\nu \gamma_{1|\partial\Omega} = \partial_\nu \gamma_{2|\partial\Omega}$.
Ayant ces informations supplémentaires, on en déduit $q_1 = q_2$ et donc $\frac{\Delta(\sqrt{\gamma_1})}{\sqrt{\gamma_1}} = \frac{\Delta(\sqrt{\gamma_2})}{\sqrt{\gamma_2}}$. C'est-à-dire $\sqrt{\gamma_i}$, $i = 1$, 2 est solution de

$$\begin{cases} (-\Delta + q_1)u = 0 \ sur\ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \sqrt{\gamma_1}_{|\partial\Omega} \end{cases}$$

car $\sqrt{\gamma_1}_{|\partial\Omega} = \sqrt{\gamma_2}_{|\partial\Omega}$, on conclut par unicité de la solution que $\gamma_1 = \gamma_2$ □

Le reste du chapitre sera consacré à la preuve du théorème de Sylvester et Uhlmann. On prendra donc dans tout ce qui suit (sauf mention contraire) un ouvert borné à bord lisse $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et deux potentiels $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ qui vérifient l'hypothèse sur les valeurs propres et tels que $\Lambda_{q_1} = \Lambda q_2$.
La première étape est de formuler une équation vérifiée par la différence $q_1 - q_2 \in L^\infty(\Omega)$. Dans le cas H^2, c'est la conséquence d'un simple calcul avec la formule de Green.
Supposons que u_1, u_2 sont solutions $H^2(\Omega)$ respectivement de :

$$\begin{cases} (-\Delta + q_i)u = 0 \ sur\ \Omega\,, \quad i = 1\,, 2 \\ u_{|\partial\Omega} = f_i \in H^{1/2}(\Omega) \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (q_1-q_2)u_1u_2\ dx &= \int_\Omega \Delta u_1\ u_2\ dx - \int_\Omega u_1\Delta u_2\ dx \\
&= \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu u_1(f_2)\ - \partial_\nu u_2(f_1))d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial\Omega} (\Lambda_{q_1} f_1(f_2)\ - \Lambda_{q_2} f_2(f_1))d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial\Omega} (\Lambda_{q_1} f_1(f_2)\ - \Lambda_{q_1} f_2(f_1))d\sigma(x) \text{ car } \Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2} \\
&= \int_{\partial\Omega} (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}) f_1(f_2)\, d\sigma(x) \quad \text{car par la définition 3.1 } \Lambda_q f(g) = \Lambda_q g(f)
\end{aligned}$$

On voit donc que les hypothèses du théorème 3.1 conduisent à

$$\int_\Omega (q_1-q_2)u_1u_2\ dx = 0 \quad \text{pour tout couple de solutions } u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$$

Dans le cas moins régulier, quelques précisions doivent être apportées au raisonnement. On introduit pour cela un espace qui se prête bien à l'équation de Schrödinger :

Définition 3.2.

$$\begin{aligned}
H_\Delta(\Omega) &:= \left\{u \in L^2(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\right\} \\
\textit{muni de la norme} \quad \|u\|^2_{H_\Delta(\Omega)} &:= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Proposition 3.1. *L'espace $H_\Delta(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H_\Delta(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert et $H^2(\Omega)$ est dense dans $H_\Delta(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H_\Delta(\Omega)}$.

Démonstration. Il est immédiat de vérifier que $H_\Delta(\Omega)$ est préhilbertien.
Soit $u \in H^2$, on a $\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ et donc

$$\forall u \in H_\Delta(\Omega)\,,\ \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_\Delta(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Comme $L^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ sont complets pour les normes respectives, on en déduit que $H_\Delta(\Omega)$ est complet pour sa norme, et qu'il est donc un espace de Hilbert.
Il suffit donc de montrer que $H^2(\Omega)^\perp = \{0\}$. Soit dans ce cas $u \in H^2(\Omega)^\perp$, on a

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^2(\Omega)\,,\ \int_\Omega \left(u\overline{v} + \Delta u\overline{\Delta v}\right)\ dx = \int_\Omega \overline{u}\left(v + \Delta^2 v\right)\ dx = 0$$

Ce qui signifie que u vérifie au sens faible

$$(\Delta^2+1)u = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega$$

Or $\Delta^2 + 1 = (-\Delta + i)(-\Delta - i)$ et $\sigma(-\Delta) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc nécessairement $u = 0$. □

Lemme 3.2. *Soit $(u_k)_{k\geq 0} \in H^2(\Omega)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\|\cdot\|_{H_\Delta(\Omega)}} u$ où $(-\Delta + q)u = 0$.*
Soit $(f_k)_{k\geq 0} = (u_{k|\partial\Omega})_{k\geq 0}$, si on note v_k la solution de (3.3) associée à la condition de Dirichlet f_k, alors on a $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\Omega)} u$.

Démonstration. La convergence H_Δ implique la convergence L^2 de $(u_k)_k$ et de $(\Delta u_k)_k$. L'inégalité triangulaire donne

$$\|v_k - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)} + \|v_k - u_k\|_{L^2(\Omega)}$$

Il suffit de montrer la convergence du deuxième terme à droite. En utilisant les résultats de l'alternative de Fredholm, on a déjà montré que $-\Delta + q$ est inversible d'inverse continu, et comme $v_k - u_k \in H_0^1(\Omega)$, on peut écrire :

$$v_k - u_k = (-\Delta + q)^{-1}(-\Delta + q)(v_k - u_k) = (-\Delta + q)^{-1}(-\Delta u_k + q u_k) \quad \text{avec} \quad -\Delta u_k + q u_k \in H^2(\Omega)$$

Par continuité, il existe $c > 0$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \|v_k - u_k\|_{L^2(\Omega)} & \leq & c\,\|(-\Delta + q)u_k\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq & c\,\|-\Delta u_k + qu\|_{L^2(\Omega)} + c\,\|qu_k - qu\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq & c\,\|\Delta u_k - \Delta u\|_{L^2(\Omega)} + c\,\|q\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|u_k - u\|_{L^2(\Omega)} \\ & \xrightarrow[k \to +\infty]{} & 0 \end{array}$$

□

On peut donc maintenant étendre l'argument utilisé sur les solutions H^2 au cadre des solutions moins régulières.

Proposition 3.2. *Supposons que $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$, alors si on note $q = q_1 - q_2 \in L^\infty(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega q u_1 u_2 \; dx = 0$$

pour tout couple $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ solutions faibles de $(-\Delta + q_i)u = 0$ sur Ω, $i = 1\,,\,2$ respectivement.

Démonstration. Si on note $u_j^{f_j}$ l'unique solution de

$$\begin{cases} (-\Delta + q_j)u = 0 \ \textit{sur} \ \Omega \\ \qquad u_{|\partial\Omega} = f_j \in H^{1/2}(\Omega) \end{cases}$$

Alors pour toutes fonctions $\forall f_1, f_2 \in H^{1/2}(\Omega)$ on a

$$\Lambda_{q_1} f_1(f_2) = \Lambda_{q_2} f_1(f_2) = \Lambda_{q_2} f_2(f_1)$$

et donc

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Omega \left(\nabla u_1^{f_1} \cdot \nabla u_2^{f_2} + q_1 u_1^{f_1} u_2^{f_2}\right) dx & = & \Lambda_{q_1} f_1(f_2) \\ & = & \Lambda_{q_2} f_2(f_1) \\ & = & \displaystyle\int_\Omega \left(\nabla u_1^{f_1} \cdot \nabla u_2^{f_2} + q_2 u_1^{f_1} u_2^{f_2}\right) dx \end{array}$$

Il suit alors que

$$\forall f_1, f_2 \in H^{1/2}(\Omega)\,,\ \Lambda_{q_1} f_1(f_2) - \Lambda_{q_2} f_1(f_2) = \int_\Omega (q_1 - q_2) u_1^{f_1} u_2^{f_2} \; dx = 0$$

Soient $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ deux solutions faibles de $(-\Delta + q_j)u = 0\,,\ j = 1,\, 2,$ alors comme $\Delta u_j = q u_j$ on a $\Delta u_j \in L^2(\Omega)$ et donc $u_j \in H_\Delta(\Omega)$. Par densité, il existe $(u_{j,k})_{k \geq 0} \in (H^2(\Omega))^{\mathbb{N}}$ qui converge vers u_j dans $H_\Delta(\Omega)$. Si on note $f_{j,k} = u_{j,k|\partial\Omega} \in H^{1/2}(\Omega)$, alors on a

$$\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1^{f_{1,k}} u_2^{f_{2,k}} \; dx = 0$$

Par le lemme pécédent on peut passer à la limite $L^2(\Omega)$ et donc

$$\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1^{f_1} u_2^{f_2} \; dx = 0$$

□

Ainsi, pour démontrer le théorème de Sylvester et Uhlmann, il suffit de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega q u_1 u_2 \, dx = 0$$

pour tout couple $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ solutions faibles de $(-\Delta + q_i)u = 0$ sur Ω. Alors $q = 0$.

3.3 Problème linéarisé et optique géométrique complexe

3.3.1 Première approximation

Le problème de l'injectivité $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$ n'est pas linéaire, nous allons donc dans un premier temps nous poser une question plus simple :
Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ qui vérifie $\int_\Omega q u_1 u_2 dx = 0$ pour tout couple u_1, u_2 de fonctions harmoniques, a-t-on nécessairement $q = 0$?
Ce problème de première approximation (appelé problème linéarisé) semble plus simple car on connait des fonctions harmoniques explicites et donc les calculs sont simplifiés. En effet, en voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, on fait la remarque cruciale suivante :

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^N \, , \; \Delta(e^{\zeta \cdot x}) = \zeta^2 e^{\zeta \cdot x} \quad \text{où} \quad \zeta = \eta + i\xi \text{ avec } \eta, \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } \zeta^2 = \zeta \cdot \zeta = |\eta|^2 - |\xi|^2 + 2i\eta \cdot \xi$$

De cette façon, si on choisit $\zeta \in \mathbb{C}^N$ tel que $\zeta^2 = 0$ alors $x \mapsto e^{\zeta \cdot x}$ est harmonique.

$$\begin{aligned} \zeta^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |\xi|^2 = |\eta|^2 \text{ et } \xi \cdot \eta = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |\xi| = |\eta| \text{ et } \xi \perp \eta \end{aligned}$$

Si on note $\Gamma := \left\{ \zeta = \eta + i\xi \in \mathbb{C}^N, \zeta^2 = 0 \right\}$, alors $x \mapsto e^{\zeta \cdot x}$ et $x \mapsto e^{-\overline{\zeta} \cdot x}$ sont harmoniques pour tout ζ dans Γ. En particulier, si on choisit arbitrairement $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $\eta \in \mathbb{R}^N$ tel que $|\eta| = |\xi| \, , \; \eta \perp \xi$, alors $\zeta = \frac{1}{2}(\eta + i\xi) \in \Gamma$. En remplaçant et en notant toujours q son prolongement par 0 en dehors de Ω, $q \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et on obtient que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N \, , \; \int_\Omega q(x) e^{x \cdot (\zeta - \overline{\zeta})} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} q(x) e^{ix \cdot \xi} \, dx = \widehat{q}(-\xi) = 0$$

Ce qui permet de conclure que $q = 0$ par injectivité de la transformée de Fourier.
Malheureusement, les solutions harmoniques ne sont pas exactes pour le problème dès que $q \neq 0$, mais elles nous serviront à construire des solutions qui s'en rapprochent pour pouvoir s'inspirer des résultats établis.

3.3.2 Solutions de l'optique géométrique complexe

Avant toute chose, notons que Γ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Gamma := \left\{ r(\theta + i\omega) \in \mathbb{C}^N \, , \; r \geq 0 \, , \; \theta, \omega \in \mathbf{S}^{N-1} \, , \; \theta \perp \omega \right\}$$

Nous allons chercher à utiliser les résultats du cas linéarisé pour construire des solutions exactes sous la forme $u(x) = e^{\zeta \cdot x}(1 + r(x))$ où r est terme correctif. Cependant, pour assurer l'existence d'une telle solution, il nous faudra utiliser le théorème suivant, conséquence des théorèmes de Hahn-Banach et de Riesz-Fréchet.

Corollaire 3.2. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un Hilbert, V un sous espace vectoriel de H et $P : V \to H$ une application linéaire. On suppose que $\exists c > 0 \, , \; \forall v \in V \, , \; \|v\| \leq c \, \|Pv\|$. Alors*

$$\forall f \in H \, , \; \exists u \in H \, , \; \textit{tel que } \forall v \in V \, , \; \langle Pv, u \rangle = \langle v, f \rangle$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\exists c > 0\,,\ \forall v \in V\,,\ \|v\| \leq c\,\|Pv\|$ implique que P est injectif. On peut donc définir sans ambiguïté la forme linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} l := P(V) & \to & \mathbb{C} \\ w = Pv & \mapsto & \langle v, f\rangle \end{array}$$

La forme l est clairement linéaire et continue et $\|l\| \leq c\,\|f\|$ car

$$\forall w = Pv \in P(V)\,,\ |l(w)| \leq \|Pv\|\,\|v\| \leq c\,\|f\|\,\|w\|$$

Par le théorème d'Hahn-Banach, l se prolonge en une application linéaire continue L sur H telle que $\|L\| \leq c\,\|f\|$. Alors par le théorème de Riesz-Fréchet, on a l'existence de $u \in H$ vérifiant $L(\cdot) = \langle \cdot, u\rangle$ et tel que $\|u\| \leq \|L\| \leq c\,\|f\|$. On a donc $\forall v \in V\,,\ \langle v, f\rangle = \langle Pv, u\rangle$ et $\|u\| \leq c\,\|f\|$. □

Ce corollaire s'utilise dans notre cas de la façon suivante :
Si on prend $H = L^2(\Omega)$, $V = \mathcal{D}(\Omega)$ et $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre m. On désigne par $P^* = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\overline{a_\alpha}\cdot)$ l'adjoint de P. Alors l'hypothèse nécessaire est automatiquement vérifiée en utilisant Poincaré et le corollaire dit que

$$\forall f \in L^2(\Omega), \exists u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \int_\Omega Pv\overline{u}\ dx = \int_\Omega v\overline{P^*u}\ dx = \int_\Omega v\overline{f}\ dx$$

Et donc, la fonction $u \in L^2(\Omega)$ est donnée comme solution faible de l'équation $P^*u = f$.

On peut alors énoncer le théorème d'existence de solutions de la forme $u(x) = e^{\zeta\cdot c}(1 + r(x))$ appelées solutions de l'optique géométrique complexe.

Théorème 3.3. *Soit $q \in L^\infty(\Omega)$, il existe des constantes $c, h_0 > 0$ telles que*

$$\forall h \in]0, h_0],\ \forall \zeta \in \Gamma \cap (\boldsymbol{S}^{N-1} + i\boldsymbol{S}^{N-1})$$

il existe une solution faible de $(-\Delta + q)u = 0$ sur Ω de la forme

$$u(x) = e^{\zeta\cdot x/h}(1 + r(x, \zeta, h)) \quad \textit{avec} \quad \|r(\cdot, \zeta, h)\|_{L^2(\Omega)} \leq ch\,\|q\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Démonstration. Si on injecte u sous cette forme dans l'équation, $x \mapsto e^{\zeta\cdot x/h}$ est harmonique et on obtient :

$$\begin{array}{rcl} (-\Delta + q)u = 0 & \Leftrightarrow & (-\Delta + q)(e^{\zeta\cdot x/h}(1 + r)) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (-\Delta + q)(e^{\zeta\cdot x/h} r) = -e^{\zeta\cdot x/h} q \\ & \Leftrightarrow & e^{-\zeta\cdot x/h}(-\Delta + q)e^{\zeta\cdot x/h} r = -q \end{array}$$

Ainsi, le fait qu'il existe une solution faible u de la forme précédente est équivalent à l'existence d'une solution faible r à $(P + q)r = -q$ où P est l'opérateur conjugué de $-\Delta$ par $e^{\zeta\cdot x/h}$. Or par l'inégalité de Carleman, on obtient c et h_0 tels que $\forall h \in]0, h_0]$:

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \left\| \left(e^{-\zeta\cdot x/h}(-\Delta + q)e^{\zeta\cdot x/h}\right) v \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Et cette dernière peut également s'écrire :

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \left\| \left(e^{\overline{\zeta}\cdot x/h}(-\Delta + \overline{q})e^{-\overline{\zeta}\cdot x/h}\right) v \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Alors en appliquant le corollaire 3.2, on obtient l'existence de $r(\cdot, \zeta, h) \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\ \int_\Omega \left(e^{\overline{\zeta}\cdot x/h}(-\Delta + \overline{q})\left(e^{-\overline{\zeta}\cdot x/h}\right) v\right) \overline{r}\ dx = -\int_\Omega v\overline{q}\ dx \quad (r \text{ est une solution faible})$$

et

$$\|r\|_{L^2(\Omega)} \leq ch\,\|q\|_{L^2(\Omega)} \leq ch|\Omega|^{1/2}\,\|q\|_{L^\infty(\Omega)}$$

En écrivant v sous la forme $v(x) = e^{\overline{\zeta}\cdot x/h}\psi(x)$ avec $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient en conjuguant :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \int_\Omega \left(e^{\zeta\cdot x/h}(-\Delta + q)\psi \right) r \; dx = \int_\Omega e^{\overline{\zeta}\cdot x/h}\psi q \; dx$$

Or comme $x \mapsto e^{\zeta\cdot x/h}$ est harmonique, $\int_\Omega e^{\zeta\cdot x/h}\Delta\psi \; dx = \int_\Omega \Delta e^{\zeta\cdot x/h}\psi \; dx = 0$ et donc

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \int_\Omega \left(e^{\zeta\cdot x/h}(-\Delta + q)\psi \right) r \; dx = \int_\Omega e^{\zeta\cdot x/h}(\Delta - q)\psi \; dx$$

puis finalement

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \int_\Omega e^{\zeta\cdot x/h}(1 + r)(-\Delta + q)\psi \; dx = 0$$

Ce qui traduit bien le fait que $x \mapsto e^{\zeta\cdot x/h}(1 + r(x, \zeta, h))$ est solution faible de $(-\Delta + q)u = 0$, quel que soit $h \in]0, h_0]$ et $\zeta \in \Gamma \cap (\mathbf{S}^{N-1} + i\mathbf{S}^{N-1})$. $\square$

3.4 Fin de la démonstration

On a maintenant tous les outils nécessaires à la preuve du théorème 3.2. Soient donc $q, q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ tels que pour tout couple $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ solutions faibles de $(-\Delta + q_j)u = 0$ on ait $\int_\Omega q u_1 u_2 \; dx = 0$. Alors on peut en particulier prendre les solutions de l'optique géométrique complexe :

$$\begin{cases} u_1 = & e^{\zeta_1\cdot x/h}(1 + r_1) \\ u_2 = & e^{\zeta_2\cdot x/h}(1 + r_2) \end{cases}$$

Où ζ_j, r_j, $j = 1$, 2 vérifient les hypothèses du théorème précédent, et donc

$$\int_\Omega q u_1 u_2 \; dx = \int_\Omega q e^{(\zeta_1 + \zeta 2)\cdot x/h}(1 + r_1 + r_2 + r_1 r_2) \; dx = 0$$

Or on peut choisir librement ζ_1, ζ_2 dans $\Gamma \cap (\mathbf{S}^{N-1} + i\mathbf{S}^{N-1})$:

$$\zeta_1 = \theta - i\frac{h}{2}\xi + i\eta\,, \;\; \zeta_2 = -\theta - i\frac{h}{2}\xi - i\eta\,, \;\; \xi \in \mathbb{R}^N, \theta \in \mathbf{S}^{N-1}$$

avec comme condition que $\theta \perp \left(\frac{h}{2}\xi \pm \eta\right)$ et si on choisit $\eta \perp \xi$, alors $\eta \perp \xi \perp \theta$ (possible en dimension 3). D'autre part $1 = |\theta|^2 = |\eta|^2 + \frac{h^2}{4}|\xi|^2$ n'est possible que pour $|\xi| \leq \frac{2}{h}$ (ce qui n'est pas contraignant car h est destiné à tendre vers 0) et dans ces conditions η est bien défini. On a alors dans ce cas :

$$\begin{cases} \zeta_1 + \zeta_2 = -ih\xi \\ |\xi| \leq \dfrac{2}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty \end{cases}$$

Donc

$$\forall |\xi| \leq \frac{2}{h}\,, \quad \int_\Omega q u_1 u_2 \; dx = \widehat{q}(\xi) + \int_\Omega q e^{-i\xi\cdot x}(r_1 + r_2 + r_1 r_2) \; dx = 0$$

et par le théorème précédent, $\|r(\cdot, \zeta, h)\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$ ce qui implique que

$$\int_\Omega q e^{-i\xi\cdot x}(r_1 + r_2 + r_1 r_2) \; dx = \mathcal{O}_{h\to 0}(h)$$

En faisant tendre h vers 0 et en prolongeant q par 0 à l'extérieur de Ω, on obtient

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N\,, \; \widehat{q}(\xi) = 0 \quad \text{et donc} \quad q \equiv 0$$

Si on prend $q = q_1 - q_2$ où $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$, alors ce qui précède donne

$$q_1 = q_2$$

Ce qui achève la preuve du théorème de Sylvester et Uhlmann.

4 Un problème spectral inverse : théorème de Borg-Levinson

Nous venons de voir qu'il était possible d'identifier les coefficients d'une équation de type Schrödinger à partir de la donnée de sa solution au bord du domaine étudié. Cependant, de nombreuses techniques d'ingénierie permettent de récupérer seulement des éléments caractéristiques d'un signal : les harmoniques. Ces derniers se traduisent mathématiquement par l'existence d'éléments propres de l'opérateur de Schrödinger. La question analogue à celle du chapitre précédent est alors : avec des conditions aux bords de Dirichlet, peut-on retrouver q à partir des éléments propres de $-\Delta + q$? Les valeurs propres se révèlent insuffisantes à la détermination de q. Cependant, l'objet de ce chapitre est consacré au résultat suivant : la connaissance des valeurs propres et des dérivées normales des fonctions propres déterminent q.

4.1 Le théorème de Borg-Levinson en dimension 1

En dimension $N = 1$, le résultat porte le nom de théorème de Borg-Levinson et s'énonce dans le cadre suivant :
Soit $q \in L^\infty(0,1)$ à valeurs réelles et $\mu \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} -y'' + qy = \mu y \quad \text{sur } (0,1) \\ y(0,\mu) = 0 \\ y'(0,\mu) = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

Une solution non identiquement nulle $y(\cdot,\mu)$ est donc une fonction propre associée à la valeur propre μ pour l'opérateur $-\Delta + q$ avec conditions de Dirichlet $y(0,\mu) = y(1,\mu) = 0$.
Notons $(\mu_i(q))_{i\geq 0}$ la suite des valeurs propres de Dirichlet pour $-\Delta + q$ et $c_i = \int_0^1 y^2(x,\mu)\,dx$. Alors le théorème s'énonce :

Théorème 4.1. *Théorème de Borg-Levinson :*
Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(0,1)$ à valeurs réelles tels que :

$$\forall i \geq 0\,,\ \mu_i(q_1) = \mu_i(q_2) \quad \textit{et} \quad c_i(q_1) = c_i(q_2)$$

Alors $q_1 = q_2$.

(Voir la preuve dans [2] et [11])
Et on a le corollaire direct :

Corollaire 4.1. *Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(0,1)$ à valeurs réelles tels que :*

$$\forall i \geq 0\,,\ \mu_i(q_1) = \mu_i(q_2) \quad \textit{et} \quad y'_{q_1}(1,\mu_i(q_1)) = y'_{q_2}(1,\mu_i(q_2))$$

Alors $q_1 = q_2$.

Démonstration. Si on note $y = y_q(\cdot,\mu)$ la solution de (4.1), on a

$$\begin{aligned} \partial_x\left(y\partial_\mu(\partial_x y) - (\partial_\mu y)(\partial_x y)\right) &= (\partial_x y)(\partial_\mu(\partial_x y)) + y\partial_\mu(\partial^2_{xx} y) - (\partial_\mu(\partial_x y))(\partial_x y) + (\partial_\mu y)(\partial^2_{xx} y) \\ &= y\partial_\mu((q-\mu)y) - (\partial_\mu y)((q-\mu)y) \\ &= -y^2 \end{aligned}$$

Et donc en intégrant sur $[0,1]$ on obtient $c_i = (\partial_\mu y(1,\mu_i))(\partial_x y(1,\mu_i))$. Or $\mu \mapsto y(1,\mu)$ admet un nombre dénombrable de zéro $(\mu_i)_{i\geq 0}$ qui sont les valeurs propres de Dirichlet de $-\Delta + q$. On peut écrire $y(1,\cdot)$ sous la forme d'un produit infini

$$y(1,\mu) = \prod_{i\geq 0}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right)$$

Sous les hypothèses du corollaire, on a donc $y_{q_1}(1,\mu) = y_{q_2}(1,\mu)$ et $\partial_\mu y_{q_1}(1,\mu_i) = \partial_\mu y_{q_2}(1,\mu_i)$ ce qui donne finalement $c_i(q_1) = c_i(q_2)$ et démontre le corollaire. $\square$

C'est une généralisation de ce corollaire que l'on se propose de démontrer dans la suite du chapitre.

4.2 Extension en dimension N : théorème de Sylvester-Uhlmann-Nachmann

On considère dans tout ce qui suit un ouvert borné à bord lisse $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et une fonction $q \in L^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles. Les fonctions considérées dans cette partie étant toutes à valeurs réelles, les produits scalaires sur $L^2(\Omega)$ et $L^2(\partial\Omega)$ seront désignés respectivement par

$$(f,g) = \int_\Omega f\,g\,dx \quad \text{et} \quad \langle f,g\rangle = \int_{\partial\Omega} f\,g\,d\sigma(x)$$

On s'intéresse au problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases}(-\Delta + q)u = \lambda u \quad \text{sur } \Omega \\ \qquad u_{|\partial\Omega} = 0\end{cases} \tag{4.2}$$

Notons dans tout ce chapitre $A_q = -\Delta + q$ l'opérateur à domaine $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $(\lambda_{k,q})_{k\geq 0}$ la suite de ses valeurs propres de Dirichlet (répétées avec multiplicité) et $(\varphi_{k,q})_{k\geq 0}$ une base hilbertienne de fonctions propres correspondantes (l'existence et les propriétés des éléments propres de A_q découlent directement des résultats du chapitre 1 car Δ^{-1} est autoadjoint compact).
L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Théorème de Sylvester-Uhlmannn-Nachmann :*
Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ et $(\varphi_{k,q_1})_{k\geq 0}$ une base hilbertienne de fonctions propres de Dirichlet de A_{q_1}. Supposons que

$$\forall k \geq 0\,,\ \lambda_{k,q_1} = \lambda_{k,q_2}$$

et qu'il existe une base hilbertienne $(\varphi_{k,q_2})_{k\geq 0}$ de fonctions propres de Dirichlet pour A_{q_2} telle que

$$\forall k \geq 0\,,\ \partial_\nu \varphi_{k,q_1} = \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \quad \textit{sur } \partial\Omega$$

Alors

$$q_1 = q_2 \quad \textit{sur } \Omega$$

L'idée centrale est d'utiliser un raisonnement d'analyse complexe pour montrer que $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ où Λ_q est l'application Dirichlet-à-Neumann. On commence par quelques constructions préliminaires.
D'après le théorème 2.5, le problème de Dirichlet

$$\begin{cases}(A_q - \lambda)u = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \qquad u_{|\partial\Omega} = f \in H^{3/2}(\partial\Omega)\end{cases}$$

admet une unique solution $u_{q,\lambda}^f \in H^2(\Omega)$ dès que $\lambda \in \rho(A_q)$ et on a l'estimation

$$\left\| u_{q,\lambda}^f \right\|_{H^2(\Omega)} \leq C_{\Omega,\lambda,q} \left\| f \right\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$$

Dans ces conditions, l'application Dirichlet-à-Neumann

$$\Lambda_{q-\lambda} : f \in H^{3/2}(\partial\Omega) \mapsto \partial_\nu(u_{q,\lambda}^f)_{|\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

est bien définie et continue de $H^{3/2}(\partial\Omega)$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

4.2.1 Quelques lemmes préliminaires

Comme le spectre de Dirichlet de A_q admet un minimum λ_0, on peut définir $\Lambda_{q-\lambda}$ sans ambiguïté dès que $\lambda < \lambda_0$.
On peut donc énoncer le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Pour tous $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ et $\lambda \leq -2\max(\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|q_2\|_{L^\infty(\Omega)})$ les applications $\Lambda_{q_1-\lambda}$ et $\Lambda_{q_2-\lambda}$ sont bien définies et*

$$\forall t \in [0, 1/2[\,, \quad \|\Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda}\|_{\mathcal{L}(H^{3/2}(\partial\Omega), H^t(\partial\Omega))} \xrightarrow[\lambda\to-\infty]{} 0$$

Démonstration. Notons dans un premier temps que $H^s(\Omega)$, $s \in [0, 2]$, est construit par interpolation de $L^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ et que donc

$$\text{si } u \in H^2(\Omega) \text{ alors } u \in H^s(\Omega) \text{ et } \|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C_{\Omega,s} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-s/2} \|u\|_{H^2(\Omega)}^{s/2}$$

Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ et $\lambda \leq -2\max(\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|q_2\|_{L^\infty(\Omega)})$. Notons $u = u^f_{q_1,\lambda} - u^f_{q_2,\lambda}$. Alors u est la solution $H^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} (A_{q_1} - \lambda)u = (q_2 - q_1)u^f_{q_2,\lambda} & \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&((A_{q_1} - \lambda)u\,,\, u) = \left((q_2 - q_1)u^f_{q_2,\lambda}\,,\, u\right) \\
\Rightarrow &\int_\Omega -\Delta u\, u\; dx + \int_\Omega (q_1 - \lambda)u^2\; dx = \int_\Omega (q_2 - q_1)u_{q_2,\lambda} u\; dx \\
\Rightarrow &\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega (q_1 - \lambda)u^2\; dx = \int_\Omega (q_2 - q_1)u_{q_2,\lambda} u\; dx \quad \text{par la formule de Green et } u_{|\partial\Omega} = 0 \\
&\Rightarrow \|q_1 - \lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|q_2 - q_1\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|u^f_{q_2,\lambda}\right\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{par Cauchy-Schwarz et } u \neq 0 \\
&\Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\|q_1 - q_2\|_{L^\infty(\Omega)}}{|\lambda|} \left\|u^f_{q_2,\lambda}\right\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{car } \|q_1\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \frac{\lambda}{2}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Or si on note v_0 la solution $H^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{sur } \Omega \\ v_{|\partial\Omega} = f \end{cases}$$

et v_1 la solution $H^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} (A_{q_2} - \lambda)v = (\lambda - q_2)v_0 & \text{sur } \Omega \\ v_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

on a clairement par unicité que $u^f_{q_2,\lambda} = v_0 + v_1$.
Par un calcul analogue au précédent, on obtient que

$$\|v_1\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\|q_2 - \lambda\|_{L^\infty(\Omega)}}{|\lambda|} \|v_0\|_{L^2(\Omega)}$$

Et donc comme $|\lambda| \geq 2\max(\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)}, \|q_2\|_{L^\infty(\Omega)})$, on a

$$\|v_1\|_{L^2(\Omega)} \leq 4\|v_0\|_{L^2(\Omega)}$$

Or par le théorème 2.5, on a $C_\Omega > 0$ tel que $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$, donc

$$u^f_{q_2,\lambda} = v_0 + v_1 \Rightarrow \left\|u^f_{q_2,\lambda}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C'_\Omega \|f\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$$

En utilisant le résultat de (4.3), on obtient

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{|\lambda|} C''_{\Omega,q_1,q_2} \|f\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$$

et

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{1}{|\lambda|} C'''_{\Omega,q_1,q_2} \|f\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$$

L'inégalité d'interpolation permet d'établir que

$$\forall s \in [0,2]\,,\ \|u\|_{H^s(\Omega)} \leq \frac{\tilde{C}_{\Omega,q_1,q_2,s}}{|\lambda|^{1-s/2}} \|f\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$$

Or pour $t \in [0,1/2]$ l'opérateur de trace de dérivée normale $\omega \mapsto \partial_\nu \omega_{|\partial\Omega}$ est continu de $H^{t+3/2}(\Omega)$ dans $H^t(\partial\Omega)$ et donc

$$\forall t \in [0,1/2]\,,\ \|\partial_\nu u\|_{H^t(\partial\Omega)} \leq \frac{\tilde{C}_{\Omega,q_1,q_2,t}}{|\lambda|^{\frac{1-2t}{4}}} \|f\|_{H^t(\partial\Omega)}$$

D'où finalement l'existence d'une constante $C > 0$, indépendante de λ, telle que

$$\|\Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda}\|_{\mathcal{L}(H^{3/2}(\partial\Omega),H^t(\partial\Omega))} \leq \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1-2t}{4}}} \xrightarrow[\lambda\to-\infty]{} 0 \quad \text{si } t \in [0,1/2[$$

□

Il va maintenant s'agir de raisonner avec des arguments d'analyse complexe, notamment en montrant que $\lambda \mapsto \Lambda_{q-\lambda}$ est une fonction méromorphe de λ et que la différence $\lambda \mapsto \Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda}$ est polynômiale en λ.
On considère dans un premier temps la résolvante de A_q :

$$\lambda \in \rho(A_q) \mapsto R_q(\lambda) = (A_q - \lambda)^{-1}$$

Proposition 4.1. *"Eigenfunctions expansion" :*

$$\forall \lambda \in \rho(A_q) \text{ et } u \in L^2(\Omega)\,, \quad R_q(\lambda)u = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{\lambda_{k,q} - \lambda} (u, \varphi_{k,q})\, \varphi_{k,q}$$

Démonstration. D'une part, notons que si $\lambda \in \rho(A_q)$, $A_q - \lambda$ est bijectif et donc $R_q(\lambda)$ est bien défini. Soit donc $\lambda \in \rho(A_q)$ et $u \in L^2(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [|0, m-1|]$. On a par définition des fonctions propres

$$(A_q - \lambda) \sum_{k=j}^{m} \frac{1}{\lambda_{k,q} - \lambda} (u, \varphi_{k,q})\varphi_{k,q} = \sum_{k=j}^{m} (u, \varphi_{k,q})\varphi_{k,q}$$

Et en appliquant les estimations du théorème 2.5, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=j}^{m} \frac{1}{\lambda_{k,q} - \lambda} (u, \varphi_{k,q})\varphi_{k,q} \right\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_{\Omega,q,\lambda} \left\| \sum_{k=j}^{m} (u, \varphi_{k,q})\varphi_{k,q} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_{\Omega,q,\lambda} \left(\sum_{k=j}^{m} (u, \varphi_{k,q})^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Or comme $u \in L^2(\Omega)$ et que $(\varphi_{k,q})_{k\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, on a la convergence du membre de droite vers $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ quand $[m \to +\infty]$, donc la série $\left(\sum_k \frac{1}{\lambda_{k,q}-\lambda}(u, \varphi_{k,q})\varphi_{k,q}\right)$ converge normalement dans $H^2(\Omega)$ et sa somme est dans $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.
De plus, par définition de la résolvante, on a $\forall \lambda \in \rho(A_q)\,,\ (A_q - \lambda) \circ R_q(\lambda) = Id$. On a donc

$$(A_q - \lambda) \left(R_q(\lambda)u - \sum_{k\leq m} \frac{1}{\lambda_{k,q} - \lambda} (u, \varphi_{k,q})\varphi_{k,q} \right) = u - \sum_{k\leq m} (u, \varphi_{k,q})\varphi_{k,q}$$

Et en utilisant encore une fois les estimations du théorème 2.5 on a

$$\left\| R_q(\lambda)u - \sum_{k\le m} \frac{1}{\lambda_{k,q}-\lambda}(u,\varphi_{k,q})\varphi_{k,q} \right\|_{H^2(\Omega)} \le C_{\Omega,q,\lambda} \left\| u - \sum_{k\le m}(u,\varphi_{k,q})\varphi_{k,q} \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

car $\sum_{k\le m}(u,\varphi_{k,q})\varphi_{k,q} \xrightarrow[m\to+\infty]{L^2(\Omega)} u$. Ce qui prouve la formule donnant $R_q(\lambda)$.
De plus, si $\lambda\in\rho(A_q)$, $R_q(\lambda)^2\in\mathcal{L}(L^2(\Omega),H^2(\Omega))$ est bien défini car $H^2(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ et en appliquant l'opérateur de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}$ à $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2\mapsto R_q(\lambda)$, on a

$$\overline{\partial}R_q(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\partial_{\lambda_1}+i\partial_{\lambda_2}\right)R_q(\lambda) = R_q(\lambda)^2 + i(iR_q(\lambda)^2) = 0$$

Donc $\lambda\mapsto R_q(\lambda)$ est holomorphe sur $\rho(A_q)$. □

Comme $\rho(A_q)$ est dénombrable, $\lambda\mapsto R_q(\lambda)$ est en fait méromorphe sur $\mathbb{C}$. On va chercher à montrer qu'il en est de même pour $\lambda\mapsto\Lambda_{q-\lambda}$.

Lemme 4.2. *Soit $q\in L^\infty(\Omega)$, pour tout entier $m>\frac{N}{2}$ et toute fonction $f\in H^{3/2}(\partial\Omega)$ on a*

$$\forall\lambda\in\rho(A_q)\,,\ \partial_\lambda^m\Lambda_{q-\lambda}f = \sum_{k\ge0}\frac{-m!}{(\lambda_{k,q}-\lambda)^{m+1}}\left\langle f,\partial_\nu\varphi_{k,q}\right\rangle\partial_\nu\varphi_{k,q}$$

Démonstration. Soient donc $q\in L^\infty(\Omega)$, $\lambda\in\rho(A_q)$ et $f\in H^{3/2}(\Omega)$. Notons $\omega\in H^2(\Omega)$ la solution de

$$\begin{cases} -\Delta\omega = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \omega_{|\partial\Omega} = f \end{cases}$$

Or on a

$$u_{q,\lambda}^f = \omega - R_q(\lambda)[(q-\lambda)\omega]$$

et par la proposition précédente, $\lambda\mapsto R_q(\lambda)$ est holomorphe sur $\rho(A_q)$. Donc $\lambda\mapsto u_{q,\lambda}^f$ est holomorphe sur $\rho(A_q)$.
D'autre part, en dérivant m fois par rapport à λ l'égalité dans $L^2(\Omega)$: $(A_q-\lambda)u=0$ pour $u=u_{q,\lambda}^f$, on obtient

$$-\Delta(\partial_\lambda^m u)+q(\partial_\lambda^m u)-\partial_\lambda^m(\lambda u) = -\Delta(\partial_\lambda^m u)+q(\partial_\lambda^m u)-\lambda\partial_\lambda^m(u)-\binom{m}{m-1}\partial_\lambda^{m-1}u = 0$$

Et donc en notant $u_\lambda^{(m)}=\partial_\lambda^m u_{q,\lambda}^f$, on voit que $\forall m\ge1\,,\ u_\lambda^{(m)}$ est solution de

$$\begin{cases} (A_q-\lambda)u = m u_\lambda^{(m-1)} \quad \text{sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Alors, par définition de $R_q(\lambda)$, on a

$$\begin{aligned} u_\lambda^{(m)} &= mR_q(\lambda)u_\lambda^{(m-1)} = m(m-1)R_q(\lambda)^2u_\lambda^{(m-2)} = \cdots = m!R_q(\lambda)^m u_\lambda^{(0)} \\ &= m!R_q(\lambda)^m[\omega - R_q(\lambda)[(q-\lambda)\omega]] \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\forall k\in\mathbb{N}\,,\ (q-\lambda)\varphi_{k,q} = \Delta\varphi_{k,q}+(\lambda_{k,q}-\lambda)\varphi_{k,q}$$

on obtient

$$((q-\lambda)\omega,\varphi_{k,q}) = (\lambda_{k,q}-\lambda)\,(\omega,\varphi_{k,q}) + (\omega,\Delta\varphi_{k,q})$$

et donc en notant que $\int_\Omega \Delta\omega\varphi_{k,q}\,dx=0$ car $\Delta\omega=0$ puis en appliquant la formule de Green

$$\begin{aligned} (w,\Delta\varphi_{k,q}) &= \int_\Omega \omega\Delta\varphi\,dx = \int_\Omega\left(\omega\Delta\varphi-\varphi_{k,q}\Delta\omega\right)\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega}\left(\omega\partial_\nu\varphi_{k,q}-\varphi_{k,q}\partial_\nu\omega\right)\,d\sigma(x) \quad \text{et } \varphi_{k,q|\partial\Omega}=0, \omega_{|\partial\Omega}=f \\ &= \int_{\partial\Omega} f\partial_\nu\varphi_{k,q}\,d\sigma(x) = \left\langle f,\partial_\nu\varphi_{k,q}\right\rangle \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$((q-\lambda)\omega, \varphi_{k,q}) = (\lambda_{k,q} - \lambda)\,(\omega, \varphi_{k,q}) + \langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q}\rangle$$

Notons que comme $(\varphi_{k,q})_{k\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, on a $\forall k, l \geq 0\,,\ (\varphi_{k,q}, \varphi_{l,q}) = \delta_{k,l}$ et en utilisant la formule pour R_q démontrée dans la proposition précédente, il vient que

$$\begin{aligned} R_q(\lambda)^{m+1}[(q-\lambda)\omega] &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(\lambda_{k,q}-\lambda)^{m+1}}\,((q-\lambda)\omega, \varphi_{k,q})\,\varphi_{k,q} \\ &= R_q(\lambda)^m\omega + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(\lambda_{k,q}-\lambda)^{m+1}}\,\langle f, \partial_\nu\varphi_{k,q}\rangle\,\varphi_{k,q} \end{aligned}$$

Si on suppose pour le moment que la série ci-dessus converge dans $H^2(\Omega)$ pour $m > \frac{N}{2}$, on a alors

$$\begin{aligned} u_\lambda^{(m)} &= m!\left(R_q(\lambda)^m\omega - R_q(\lambda)^{m+1}[(q-\lambda)\omega]\right) \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{-m!}{(\lambda_{k,q}-\lambda)^{m+1}}\,\langle f, \partial_\nu\varphi_{k,q}\rangle\,\varphi_{k,q} \end{aligned}$$

Et comme la convergence H^2 permet de dériver terme à terme, on obtient que

$$\partial_\lambda^m \Lambda_{q-\lambda} f = \partial_\nu u_\lambda^{(m)} = \sum_{k\geq 0} \frac{-m!}{(\lambda_{k,q}-\lambda)^{m+1}}\,\langle f, \partial_\nu\varphi_{k,q}\rangle\,\partial_\nu\varphi_{k,q}$$

□

4.2.2 Estimation des valeurs propres et fin de la preuve

Pour démontrer la convergence de la série, on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(\mu_k(\Omega))_{k\geq 1}$ la suite des valeurs propres du Laplacien de Dirichlet avec domaine $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, alors*

$$\exists c_1, c_2 > 0\,,\ \textit{tels que}\ \forall k \in \mathbb{N}^*\,,\ c_1 k^{2/N} \leq \mu_k \leq c_2 k^{2/N}$$

Démonstration. (voir [9] pour plus de détails concernant cette propriété)
On peut démontrer que si Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors quel que soit $k \geq 0\,,\ \mu_k(\Omega_1) \geq \mu_k(\Omega_2)$. En fait on a la formule suivante :

$$\begin{gathered} \mu_k(\Omega) = \inf_{A\in\mathcal{A}_k}\max_{v\in A} |||\nabla v|||^2_{L^2(\omega)} \\ \text{où } \mathcal{A}_k(\Omega) = \left\{h(\mathcal{S}^{k-1}), h \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S}^{k-1};\mathcal{S}) \text{ impaire}\right\} \\ \text{et } \mathcal{S} = \left\{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\} \end{gathered}$$

Quitte à encadrer Ω par des pavés, on peut restreindre la preuve au cas où Ω est lui-même un pavé. De même, avec la formule ci-dessus, on obtient que

$$\forall z \in \mathbb{R}^N\,,\ t > 0\,,\ \mu_k(z+\Omega) = \mu_k(\Omega) \quad \text{et} \quad \mu_k(t\Omega) = \frac{1}{t^2}\mu_k(\Omega)$$

On est donc ramené au cas où $\Omega = \prod_{i=1}^N]0, T_i[$ avec $T_i \in]0,1[$.
En séparant les variables dans

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{sur}\Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

on obtient N équations

$$\begin{cases} -u_i'' = \mu u_i & \text{sur}]0, T_i[\\ u_{i|\ ]0,T_i[} = 0 \end{cases}$$

En fixant $i \in [|1, N|]$, on est dans le cas de la dimension 1 qui donne comme éléments propres

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mu_{i,k} = \frac{k^2\pi^2}{L_i^2} \quad \text{et} \quad u_{i,k}(x) = sin\left(\sqrt{\mu_{i,k}}x\right)$$

Ce qui revient à indexer les solutions en dimension N par un multi-indice $\alpha \in (\mathbb{N}^*)^N$ et on écrit

$$u_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\alpha_i \pi}{L_i} x_i \right) \quad \text{et} \quad \mu_\alpha = \pi^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i^2}{T_i^2}$$

Si on ordonne maintenant les μ_α par ordre croissant, notons $(\mu_j)_{j\geq 1}$ la suite obtenue, alors on peut trouver des constantes $C, C' > 0$ qui dépendent uniquement des T_i telles que

$$\forall R > 0\,,\ CR^{N/2} \leq \#\{j \geq 1, \mu_j \leq R\} \leq C' R^{N/2}$$

En choisissant $R = \mu_k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\ C\mu_k^{N/2} \leq k \leq C' \mu_k^{N/2}$$

Et donc par suite

$$\exists c_1, c_2 > 0\,,\ \forall k \in \mathbb{N}^*\,,\ c_1 k^{2/N} \leq \mu_k \leq c_2 k^{2/N}$$

$\square$

Ayant cet encadrement, on peut estimer les valeurs propres de Dirichlet $(\lambda_{k,q})$ de A_q. En effet, comme $q \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$\mu_k - \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_{k,q} \leq \mu_k + \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$$

De plus, $\varphi_{k,q}$ est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_{k,q} u & \text{sur}\Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Donc par le théorème 2.5 on a

$$\|\varphi_{k,q}\|_{H^2(\Omega)} \leq C|\lambda_{k,q}|\, \|\varphi_{k,q}\|_{L^2(\Omega)} = C|\lambda_{k,q}|$$

Donc à constantes multiplicatives strictement positives près, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle}{(\lambda_{k,q} - \lambda)^{m+1}} \varphi_{k,q} \right\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\ \frac{|\lambda_{k,q}|}{|\lambda_k, q - \lambda|^{m+1}} |\langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle| \\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{|\lambda_{k,q}|^m} \quad \text{car } |\langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle| \leq C' \|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|\varphi_{k,q}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^{\frac{2m}{N}}} \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que la série de terme général $\left(\frac{\langle f, \partial_\nu \varphi_{k,q} \rangle}{(\lambda_{k,q}-\lambda)^{m+1}} \varphi_{k,q} \right)_{k\geq 0}$ converge dans $H^2(\Omega)$ si $m > \frac{N}{2}$ et complète la preuve du lemme précédent.

On a maintenant tous les outils pour démontrer le théorème (4.2).
Soient donc $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ tels que

$$\forall k \geq 0\,,\ \lambda_{i,q_1} = \lambda_{i,q_2} \quad \text{et} \quad \partial_\nu \varphi_{k,q_1} = \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \text{ sur } \partial\Omega$$

Alors par le lemme (4.2), on a pour $\lambda \in \rho(A_{q_1}) \cap \rho(A_{q_2})$ et $m > \frac{N}{2}$:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda^m (\Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda}) &= m! \sum_{k\geq 0} \left(\frac{\langle \cdot, \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \rangle}{(\lambda_{k,q_2} - \lambda)^{m+1}}\ \partial_\nu \varphi_{k,q_2} - \frac{\langle \cdot, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \rangle}{(\lambda_{k,q_1} - \lambda)^{m+1}}\ \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors, comme $\lambda \mapsto \Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda}$ est méromorphe sur $\rho(A_{q_1}) \cap \rho(A_{q_2})$, on peut conclure qu'elle est polynômiale sur $\rho(A_{q_1}) \cap \rho(A_{q_2})$.
Or on a par le lemme (4.1) que

$$\Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda} \xrightarrow[\lambda\to-\infty]{} 0 \quad \text{dans } \mathcal{L}(H^{3/2}(\partial\Omega), H^t(\partial\Omega))\,,\ \forall t \in [0, 1/2[$$

Et donc,

$$\forall \lambda \in \rho(A_{q_1}) \cap \rho(A_{q_2})\,,\ \Lambda_{q_1-\lambda} = \Lambda_{q_2-\lambda}$$

On conclut par le théorème de Sylvester et Uhlmann traité au chapitre précédent (ou le théorème de Bukhgeim si $N = 2$: [4]) que

$$q_1 = q_2$$

Ce qui achève la preuve du théorème de Sylvester-Uhlmann-Nachmann.

4.3 Une extension dûe à Isozaki

Le résultat que l'on vient de démontrer dit qu'il est possible de retrouver q à partir des valeurs propres et des dérivées des fonctions propres au bord. Cependant, H. Isozaki montre que la totalité de ces données surdétermine le problème et que les propriétés asymptotiques suffisent à identifier q (voir [8]). C'est ce résultat que nous étudions dans cette partie.

On va être amené, dans cette partie, à manipuler des fonctions à valeurs complexes, on notera donc par la suite les produits scalaires sur $L^2(\Omega)$ et $L^2(\partial\Omega)$ respectivement par

$$(f,g) = \int_\Omega f\,\overline{g}\,dx \quad \text{et} \quad \langle f,g\rangle = \int_{\partial\Omega} f\,\overline{g}\,d\sigma(x)$$

De plus, $\rho(A_q)$ désigne l'ensemble résolvant de A_q comme une partie ouverte de $\mathbb{C}$.

Théorème 4.3. *Théorème d'Isozaki :*
Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ et $(\varphi_{k,q_1})_{k\geq 0}$ une base hilbertienne de fonctions propres de Dirichlet de A_{q_1}. Soit $\tilde{n} \geq 0$ et supposons que

$$\forall k \geq \tilde{n}\,,\ \lambda_{k,q_1} = \lambda_{k,q_2}$$

et qu'il existe une base hilbertienne $(\varphi_{k,q_2})_{k\geq 0}$ de fonctions propres de Dirichlet pour A_{q_2} telle que

$$\forall k \geq \tilde{n}\,,\ \partial_\nu \varphi_{k,q_1} = \partial_\nu \varphi_{k,q_2} \quad \textit{sur } \partial\Omega$$

Alors

$$q_1 = q_2 \quad \textit{sur } \Omega$$

On utilise encore les mêmes notations : $A_q = -\Delta + q$ à domaine $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $q \in L^\infty(\Omega)$, $R_q(\lambda) = (A_q - \lambda)^{-1}$ quand $\lambda \in \rho(A_q)$ avec conditions de Dirichlet, $(\lambda_{k,q})_{k\geq 0}$ la suite des valeurs propres de Dirichlet répétées avec multiplicités de A_q et $(\varphi_{k,q})_{k\geq 0}$ une base de fonctions propres associées.
De même, Λ désigne toujours l'opérateur Dirichlet-à-Neumann et $u^f_{q,\lambda}$ la solution $H^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} (A_q - \lambda)u = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \qquad u_{|\partial\Omega} = f \in H^{3/2(\partial\Omega)} \end{cases}$$

On définit deux nouvelles fonctions qui seront omniprésentes dans le raisonnement qui va suivre :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^-, \omega \in \mathbf{S}^{N-1}, x \in \mathbb{R}^N \quad \psi_{\lambda,\omega}(x) := e^{i\sqrt{\lambda}\omega\cdot x}$$

$$\forall \lambda \in \rho(A_q) \cap \mathbb{C}^-, \theta, \omega \in \mathbf{S}^{N-1}, \quad S_q(\lambda,\theta,\omega) := \left\langle \Lambda_{q-\lambda}\psi_{\lambda,\omega}\,,\, \overline{\psi_{\lambda,-\theta}} \right\rangle$$

En un sens, $q \mapsto S_q$ définit une transformation de $q \in L^\infty(\Omega)$ en S_q et nous allons dans un premier temps montrer que q est déterminé par S_q.
Pour cela, on utilise le lemme crucial suivant :

Lemme 4.4. *Pour tous $\lambda \in \rho(A_q) \cap \mathbb{C}^-$, $\theta, \omega \in \boldsymbol{S}^{N-1}$ on a :*

$$S_q(\lambda,\theta,\omega) = \frac{-\lambda}{2}|\theta-\omega|^2 \int_\Omega \psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,dx + \int_\Omega \psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)q(x)\,dx - \left(R_q(\lambda)[q\psi_{\lambda,\omega}], \overline{q\psi_{\lambda,-\theta}}\right)$$

Démonstration. Posons pour commencer

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \Omega\times(\rho(A_q)\cap\mathbb{C}^-)\times\mathbf{S}^{N-1} & \to & \mathbb{C} \\ & (x,\lambda,\omega) & \mapsto & \psi_{\lambda,\omega}(x)-R_q(\lambda)[q\psi_{\lambda,\omega}](x) \end{array}$$

Alors en remarquant que $\Delta\psi_{\lambda,\omega}(x)=-\lambda\psi_{\lambda,\omega}(x)$ et que $R_q(\lambda)$ est associé à des conditions de Dirichlet homogènes, on vérifie immédiatement que $\Psi(\cdot,\lambda,\omega)$ est la solution de

$$\begin{cases} (A_q-\lambda)\Psi=0 \quad \text{sur } \Omega \\ \Psi_{|\partial\Omega}=\psi_{\lambda,\omega} \end{cases}$$

En utilisant la définition de S_q et la formule de Green à plusieurs reprises, on peut mener le calcul suivant :

$$\begin{aligned} S_q(\lambda,\theta,\omega) &= \int_{\partial\Omega}\psi_{\lambda,-\theta}(x)\partial_{\nu_x}\Psi(x,\lambda,\omega)\,d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial\Omega}\partial_{\nu_x}\psi_{\lambda,-\theta}(x)\Psi(x,\lambda,\omega)\,d\sigma(x) \\ &\quad +\int_\Omega\left(\psi_{\lambda,-\theta}(x)\Delta\Psi(x,\lambda,\omega)-\Delta\psi_{\lambda,-\theta}(x)\Psi(x,\lambda,\omega)\right)\,dx \end{aligned}$$

Or $\partial_\nu\psi_{\lambda,-\theta}=-i\nu\cdot\theta\sqrt{\lambda}\psi_{\lambda,-\theta}$, $\Delta\psi_{\lambda,-\theta}=-\lambda\psi_{\lambda,-\theta}$, $\Delta\Psi=(q-\lambda)\Psi$ et donc

$$\begin{aligned} S_q(\lambda,\theta,\omega) &= -i\sqrt{\lambda}\int_{\partial\Omega}\theta\cdot\nu_x\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,d\sigma(x) \\ &\quad +\int_\Omega\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,q(x)\,dx-\int_\Omega R_q(\lambda)[q\psi_{\lambda,\omega}](x)q(x)\psi_{\lambda,-\theta}(x)\,dx \\ &= -i\sqrt{\lambda}\int_{\partial\Omega}\theta\cdot\nu_x\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,d\sigma(x)+\int_\Omega\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)q(x)\,dx-\left(R_q(\lambda)[q\psi_{\lambda,\omega}],\overline{q\psi_{\lambda,-\theta}}\right) \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la formule de Green, on a d'une part

$$\begin{aligned} -\lambda|\theta-\omega|^2\int_\Omega\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,dx &= \int_\Omega 1\,\Delta\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,dx \\ &= -0+\int_{\partial\Omega}\partial_{\nu_x}\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,d\sigma(x) \\ &= -i\sqrt{\lambda}\int_{\partial\Omega}(\theta-\omega)\cdot\nu_x\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,d\sigma(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et d'autre part } 0 &= \int_\Omega\left(\Delta\psi_{\lambda,-\theta}(x)\psi_{\lambda,\omega}(x)-\psi_{\lambda,-\theta}(x)\Delta\psi_{\lambda,\omega}(x)\right)\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega}\left(\partial_{\nu_x}\psi_{\lambda,-\theta}(x)\psi_{\lambda,\omega}(x)-\psi_{\lambda,-\theta}(x)\partial_{\nu_x}\psi_{\lambda,\omega}(x)\right)\,d\sigma(x) \\ &= -i\sqrt{\lambda}\int_{\partial\Omega}(\theta+\omega)\cdot\nu_x\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,d\sigma(x) \end{aligned}$$

En additionnant ces deux derniers résultats, on obtient que

$$-i\sqrt{\lambda}\int_{\partial\Omega}\theta\cdot\nu_x\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,d\sigma(x)=\frac{-\lambda}{2}|\theta-\omega|^2\int_\Omega\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,dx$$

Ce qui justifie la formule annoncée par le lemme en remplaçant :

$$S_q(\lambda,\theta,\omega)=\frac{-\lambda}{2}|\theta-\omega|^2\int_\Omega\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)\,dx+\int_\Omega\psi_{\lambda,\omega-\theta}(x)q(x)\,dx-\left(R_q(\lambda)[q\psi_{\lambda,\omega}],\overline{q\psi_{\lambda,-\theta}}\right)$$

□

L'identifiabilité de q à partir de S_q va nécessiter de se ramener à la transformée de Fourier.

On définit pour ce faire plusieurs paramètres :
Soit $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ arbitrairement fixé et $\eta \in \mathbf{S}^{N-1}$ $\eta \perp \xi$. On prend A un grand paramètre, par exemple tel que $A > \max\left(1, \frac{|\xi|}{2}\right)$. De cette façon, $C_A = \sqrt{1 - \frac{|\xi|^2}{4A^2}}$ est bien définie et on pose

$$\begin{cases} \theta_A = C_A \eta + \dfrac{\xi}{2A} \\ \omega_A = C_A \eta - \dfrac{\xi}{2A} \\ \sqrt{t_A} = A + i \end{cases}$$

Alors
— $|\theta_A|^2 = |\omega_A|^2 = C_A^2 |\eta|^2 + \frac{|\xi|^2}{4A^2} = 1$
— $\sqrt{t_A}(\theta_A - \omega_A) = \frac{(A+i)\xi}{A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \xi$
— $\Im(t_A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} +\infty$
— $\Im(\sqrt{t_A}\,\theta_A)$ et $\Im(\sqrt{t_A}\,\omega_A)$ sont bornées quand $A \to +\infty$
On peut dans ces conditions injecter ces paramètres dans S_q :

$$\begin{aligned} S_q(t_A, \theta_A, \omega_A) = \frac{-(A+i)^2}{2A^2} \quad |\xi|^2 \quad & \int_\Omega e^{-i\frac{A+i}{A}\xi \cdot x}\, dx + \int_\Omega e^{-i\frac{A+i}{A}\xi \cdot x} q(x)\, dx \\ & - \left(R_q(t_A)[q\psi_{t_A,\omega_A}], \overline{q\psi_{t_A,-\theta_A}}\right) \end{aligned}$$

Ω étant borné, on peut appliquer sans problème le théorème de convergence dominée aux deux premières intégrales avec respectivement comme chapeau intégrable $x \mapsto e^{\xi \cdot x}$ et $x \mapsto \|q\|_{L^\infty(\Omega)}\, e^{\xi \cdot x}$ (indépendants de A).
On a donc

$$\frac{-(A+i)^2}{2A^2}|\xi|^2 \int_\Omega e^{-i\frac{A+i}{A}\xi \cdot x}\, dx + \int_\Omega e^{-i\frac{A+i}{A}\xi \cdot x} q(x)\, dx \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{-|\xi|^2}{2} \int_\Omega e^{-i\xi \cdot x}\, dx + \int_\Omega e^{-i\xi \cdot x} q(x)\, dx$$

Pour le troisième terme, on a :

$$\left(R_q(t_A)[q\psi_{t_A,\omega_A}], \overline{q\psi_{t_A,-\theta_A}}\right) = \int_\Omega R_q(t_A)[q\psi_{t_A,\omega_A}](x) q(x) e^{-i(A+i)\theta_A \cdot x}\, dx$$

dont on peut vérifier facilement qu'il tend vers 0 quand $A \to +\infty$.
On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.4.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus 0\,, \quad \lim_{A \to +\infty} S_q(t_A, \theta_A, \omega_A) = -\frac{|\xi|^2}{2} \int_\Omega e^{-i\xi \cdot x}\, dx + \widehat{q}(\xi)$$

(où on a prolongé q par 0 à l'extérieur de Ω)

Démonstration. La construction précédente montre le résultat pour $\xi \neq 0$. □

Notons l'intérêt de ce théorème :
si $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ vérifient $S_{q_1} = S_{q_2}$, alors

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \quad , \quad & -\frac{|\xi|^2}{2} \int_\Omega e^{-i\xi \cdot x}\, dx + \widehat{q_1}(\xi) = -\frac{|\xi|^2}{2} \int_\Omega e^{-i\xi \cdot x}\, dx + \widehat{q_2}(\xi) \\ \Rightarrow \quad & \forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}\ ,\ \widehat{q_1}(\xi) = \widehat{q_2}(\xi) \\ \Rightarrow \quad & p.p.\ x \in \mathbb{R}^N,\ q_1(x) = q_2(x) \end{aligned}$$

On a donné deux définitions de l'opérateur Dirichlet-à-Neumann Λ_q. La première à la définition 3.1 : en tant qu'opérateur continu de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ vers $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. La seconde juste après avoir énoncé le théorème 4.2 : en tant qu'opérateur continu de $H^{3/2}(\partial\Omega)$ vers $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Par interpolation, Λ_q définit donc un opérateur continu de $H^1(\partial\Omega)$ vers $L^2(\partial\Omega)$.

Le dernier élément nécessaire à la preuve du théorème 4.3 est le lemme suivant, qui fournit une estimation de $\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}$:

Lemme 4.5. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 4.3, il existe une constante $c > 0$ indépendante de λ telle que*

$$\|\Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda}\|_{\mathcal{L}(H^1(\partial\Omega),L^2(\partial\Omega))} \leq \frac{c}{|\lambda|} \quad \textit{pour } |\lambda| \textit{ assez grand}$$

Démonstration. Pour $m > \frac{N}{2}$, on a l'expression de $\partial_\lambda^m \Lambda_{q-\lambda}$ (lemme 4.2) :

$$\forall \lambda \in \rho(A_q)\,,\ \partial_\lambda^m \Lambda_{q-\lambda} = \sum_{k\geq 0} \frac{-m!}{(\lambda_{k,q}-\lambda)^{m+1}} \langle \cdot, \partial_\nu \varphi_{k,q}\rangle\, \partial_\nu \varphi_{k,q}$$

Alors pour toute fonction $f \in H^1(\partial\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda^m \left(\Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda}\right) f &= m! \sum_{k\geq 0} \left(\frac{\langle\, f\,, \partial_\nu \varphi_{k,q_2}\rangle}{(\lambda_{k,q_2}-\lambda)^{m+1}}\, \partial_\nu \varphi_{k,q_2} - \frac{\langle\, f\,, \partial_\nu \varphi_{k,q_1}\rangle}{(\lambda_{k,q_1}-\lambda)^{m+1}}\, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \right) \\
&= m! \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \left(\frac{\langle\, f\,, \partial_\nu \varphi_{k,q_2}\rangle}{(\lambda_{k,q_2}-\lambda)^{m+1}}\, \partial_\nu \varphi_{k,q_2} - \frac{\langle\, f\,, \partial_\nu \varphi_{k,q_1}\rangle}{(\lambda_{k,q_1}-\lambda)^{m+1}}\, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \right)
\end{aligned}$$

En intégrant m fois par rapport à λ, on obtient m opérateurs $L_j \in \mathcal{L}(H^1(\partial\Omega), L^2(\partial\Omega))$ tels que

$$\left(\Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda}\right) f = \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \left(\frac{\langle\, f\,, \partial_\nu \varphi_{k,q_2}\rangle}{\lambda_{k,q_2}-\lambda}\, \partial_\nu \varphi_{k,q_2} - \frac{\langle\, f\,, \partial_\nu \varphi_{k,q_1}\rangle}{\lambda_{k,q_1}-\lambda}\, \partial_\nu \varphi_{k,q_1} \right) + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j L_j(f)$$

Or en utilisant le lemme 4.1,

$$\forall f \in H^1(\partial\Omega), \|(\Lambda_{q_1-\lambda}\Lambda_{q_2-\lambda})\, f\|_{L^2(\partial\Omega)} \xrightarrow[\lambda\to-\infty]{} 0$$

Donc nécessairement $\forall j \in [|0, m-1|], L_j = 0$.
On a donc en remarquant que $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^1}$ et pour $f \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\|(\Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda})\, f\|_{L^2(\partial\Omega)}}{\|f\|_{H^1(\partial\Omega)}} &\leq \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \left(\frac{\|\partial_\nu \varphi_{k,q_2}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{|\lambda_{k,q_2}-\lambda|} + \frac{\|\partial_\nu \varphi_{k,q_1}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{|\lambda_{k,q_1}-\lambda|} \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} \left(\frac{1}{|\lambda_{k,q_2}-\lambda|} + \frac{1}{|\lambda_{k,q_1}-\lambda|} \right) \left(\|\partial_\nu \varphi_{k,q_2}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\partial_\nu \varphi_{k,q_1}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right)
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{|\lambda_{k,q_2}-\lambda|} + \frac{1}{|\lambda_{k,q_1}-\lambda|} = \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$ quand $\lambda \to -\infty$. D'où l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour $|\lambda|$ assez grand, on ait

$$\|\Lambda_{q_1-\lambda} - \Lambda_{q_2-\lambda}\|_{\mathcal{L}(H^1(\partial\Omega),L^2(\partial\Omega))} \leq \frac{c}{|\lambda|}$$

□

On a maintenant tous les éléments nécessaires à la preuve du théorème 4.3 et on se place donc sous ses hypothèses : $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ qui vérifient $\lambda_{k,q_1} = \lambda_{k,q_2}$ et $\partial_\nu \varphi_{k,q_1} = \partial_\nu \varphi_{k,q_2}$ sur $\partial\Omega$ à partir d'un certain rang $\tilde{n}$.
Soit $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ arbitrairement fixé et t_A, θ_A, ω_A défini comme précédemment. Pour A suffisamment grand, on peut utiliser le lemme 4.5 et donc

$$\|\Lambda_{q_1-t_A} - \Lambda_{q_2-t_A}\|_{\mathcal{L}(H^1(\partial\Omega),L^2(\partial\Omega))} \leq \frac{c}{|t_A|}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|S_{q_1}(t_A,\theta_A,\omega_A) - S_{q_2}(t_A,\theta_A,\omega_A)| &= \left|\left\langle \left(\Lambda_{q_1-t_A} - \Lambda_{q_2-t_A}\right) \psi_{t_A,\omega_A}, \overline{\psi_{t_A,-\theta_A}} \right\rangle\right| \\
&\leq \frac{c}{|t_A|}\, \|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{H^1(\partial\Omega)}\, \|\psi_{t_A,-\theta_A}\|_{L^2(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

Or par continuité de l'opérateur trace de $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ pour $s > 0$ on a $c_1 > 0$ tel que

$$\|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{H^1(\partial\Omega)} \leq c_1 \|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{H^{3/2}(\Omega)}$$

Par interpolation, on a également $c_2 > 0$ tel que

$$\|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq c_2 \|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{H^2(\Omega)}^{3/4}$$

De plus, on a

$$\|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega \left|e^{i\sqrt{t_A}\omega_A\cdot x}\right|^2 dx = \int_\Omega e^{-2\omega_A\cdot x}\, dx = \mathcal{O}(1)$$

et

$$\begin{aligned}
\|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{H^2(\Omega)}^2 &= \|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \||\nabla\psi_{t_A,\omega_A}|\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta\psi_{t_A,\omega_A}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \mathcal{O}(1) + \int_\Omega \left|i\sqrt{t_A}\omega_A e^{i\sqrt{t_A}\omega_A\cdot x}\right|^2 dx + \int_\Omega \left|-t_A e^{i\sqrt{t_A}\omega_A\cdot x}\right|^2 dx \\
&= \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(|t_A|) + \mathcal{O}(|t_A|^2)
\end{aligned}$$

Donc $\|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{H^2(\Omega)} = \mathcal{O}(|t_A|)$, et il existe $c_3 > 0$ tel que

$$\|\psi_{t_A,\omega_A}\|_{H^1(\partial\Omega)} \leq c_3 |t_A|^{3/4}$$

De même que ci-dessus, on a $\|\psi_{t_A,-\theta_A}\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(1)$ et donc on a l'existence de $C > 0$ tel que

$$|S_{q_1}(t_A,\theta_A,\omega_A) - S_{q_2}(t_A,\theta_A,\omega_A)| \leq C|t_A|^{-1/4} \quad \text{pour } A \text{ assez grand}$$

Alors, on a en prolongeant q_1, q_2 par 0 en dehors de Ω :

$$\lim_{A\to+\infty} |S_{q_1}(t_A,\theta_A,\omega_A) - S_{q_2}(t_A,\theta_A,\omega_A)| = 0 = \widehat{q_1}(\xi) - \widehat{q_2}(\xi)$$

ξ étant arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, on a par la remarque suivant le théorème 4.4 que

$$q_1 = q_2$$

Ce qui conclut la preuve du théorème 4.3.

5 Identifiabilité d'un potentiel pour les ondes

On s'intéresse dans ce chapitre à un problème analogue au problème de Calderòn, mais cette fois pour l'équation des ondes. Nous considèrerons donc l'opérateur d'Alembertien $\Box_{t,x} = \partial_{tt}^2 - \Delta_x$ pour les fonctions de variables $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^N$. L'idée principale est celle de la détermination d'un potentiel $q \in L^\infty \cap \mathcal{C}^0$ dans l'équation $\Box_{t,x} u + qu = 0$ sur un ouvert Ω à partir des valeurs de u au bord de Ω.

5.1 "Cone-beam transform" et condition de Tuy-Kirillov

D'une façon analogue à l'utilisation de la transformée de Fourier dans les chapitres précédents, nous aurons besoin dans ce dernier chapitre d'une autre transformation pour résoudre le problème inverse : la transformation faisceau ("Cone-beam transform" en anglais).

On définit pour $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ la transformée faisceau de u par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \,,\ \forall \omega \in \mathbf{S}^{N-1} \,,\ \mathcal{I}_\omega u(x) := \int_0^{+\infty} u(x + t\omega)\, dt$$

Notons que l'intégrale a un sens car u est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^N$ donc sur toute ligne de $\mathbb{R}^N$. Cette transformation définit une fonction $\mathcal{I}_\omega u(x)$ homogène de degré -1 en ω.

À la différence de la transformation de Fourier, il n'existe de résultat d'injectivité de la transformation faisceau que dans certains cas particuliers de support de la fonction u et de l'ensemble des points sources x, c'est la condition de Tuy-Kirillov.

Définition 5.1. *Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et Σ un ensemble de demi-droites de $\mathbb{R}^N$. On dit que Σ est complet dans K si pour tout point $x \in K$ et tout hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^N$ passant par x il existe une droite $\sigma \in \Sigma$ telle que $x \in \sigma$ et $\sigma \subset \mathcal{H}$.*

Cette notion purement géométrique permet d'exprimer une condition pour justifier l'injectivité de la transformation faisceau à partir d'un ensemble de sources donné.

Théorème 5.1. *Condition de Tuy-Kirillov :*
Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble de "sources" et $\Sigma(\Gamma)$ l'ensemble des demi-droites issues de Γ : $\Sigma(\Gamma) := \Big\{ \{x + t\omega \,,\ t \geq 0\}\ \ x \in \Gamma \text{ et } \omega \in \boldsymbol{S}^{N-1} \Big\}$.
Si $\Sigma(\Gamma)$ est complet dans K, alors toute fonction f à support dans K est entièrement déterminée par la donnée de $\Big\{ \mathcal{I}_\omega f(x) \,,\ x \in \Gamma \text{ et } \omega \in \boldsymbol{S}^{N-1} \Big\}$.

On se contentera de l'énoncé de ce théorème dont une preuve détaillée est faite dans [14] (partie 2.2.2). Remarquons que la preuve en question est constructive et donne même une formule pour $\widehat{f}$.

5.2 Cas d'un potentiel statique

5.2.1 Réduction du problème

Soient un entier $N \in \mathbb{N}^*$, un réel $T > 0$ et un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à bord lisse.
On considère le problème de Cauchy avec donnée de Neumann au bord :

$$\begin{cases} \Box_{t,x} u + qu = 0 & \text{sur } \Omega \times [0,T] \\ u_{|t=0} = \Phi \;, \partial_t u_{|t=0} = \psi & \text{sur } \Omega \\ \partial_\nu u = f & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} \tag{5.1}$$

Où $q \in L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$, $\Phi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\partial\Omega \times [0,T])$. On a donc existence et unicité d'une solution faible $u \in H^2(\Omega \times [0,T])$ au problème 5.1.
Pour $q \in L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$, on peut donc définir sans ambiguïté l'application Neumannn-à-Dirichlet

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_q : C^\infty(\partial\Omega \times [0,T]) & \to & H^{3/2}(\partial\Omega \times [0,T]) \\ f & \mapsto & u_{|\partial\Omega \times [0,T]} \end{array}$$

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème 5.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné à bord lisse, $q_1\,, q_2 \in L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$, $\Phi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$ et $T > 0$.*

$$\textit{Si } \Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2} \textit{ et } T > diam(\Omega) \textit{ alors } q_1 = q_2$$

On a abusivement noté Λ_q alors que Λ dépend aussi de Φ et ψ. Or cet abus ne pose pas de problème car on peut réduire le problème au cas où $\Phi = \psi = 0$. En effet, si on note temporairement $\Lambda_q = \Lambda_{q,\Phi,\psi}$, on considère u_1 et u_2 solutions respectives du problème de Cauchy 5.1 avec $\partial_\nu u_1 = f$ et $\partial_\nu u_2 = 0$. Alors $u_1 - u_2$ est solution de

$$\begin{cases} \Box_{t,x} u + qu = 0 & \text{sur } \Omega \times [0,T] \\ u_{|t=0} = \partial_t u_{|t=0} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_\nu u = f & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

Donc

$$\forall f \in C^\infty(\partial\Omega \times [0,T])\,,\ \Lambda_{q,0,0}(f) = \Lambda_{q,\Phi,\psi}(f) - \Lambda_{q,\Phi,\psi}(0)$$

C'est-à-dire

$$\Lambda_{q_1,\Phi,\psi} = \Lambda_{q_2,\Phi,\psi} \Rightarrow \Lambda_{q_1,0,0} = \Lambda_{q_2,0,0}$$

On peut donc se contenter de traiter le cas $\Phi = \psi = 0$ et on notera $\Lambda_q = \Lambda_{q,0,0}$.
Dans ces conditions, on est ramené à un problème de Cauchy homogène avec des conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega \times [0,T]$ de classe C^∞. La régularité de la solution u permet donc d'écrire des intégrales faisant intervenir $u, \partial_t u, \partial_{tt}^2 u, \nabla_x u$ et $\Delta_x u$.
Plutôt que de travailler directement sur Λ_q, nous allons encore réduire le problème et étudier une forme bilinéaire entièrement déterminée par Λ_q.
Etant donné une fonction h sur $\partial\Omega \times [0,T]$, on définit $\tilde{h}(x,t) = h(x, T-t)$.
On note u la solution de 5.1 pour $\Phi = \psi = 0$, Λ_q est alors bien défini et on peut donc définir la forme quadratique

$$\mathcal{Q}_q(f) : f \in C^\infty(\partial\Omega \times [0,T]) \mapsto \int_{\partial\Omega \times [0,T]} f(x,t)\widetilde{u}(x,t)\, d\sigma_t(x)$$

Si on prend une autre fonction $g \in C^\infty(\partial\Omega \times [0,T])$ et on note v la solution de 5.1 avec f remplacée par g, alors on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_q(f+g) - \mathcal{Q}_q(f) - \mathcal{Q}_q(g) &= \int_{\partial\Omega \times [0,T]} (f+g)(\widetilde{u} + \widetilde{v})\, d\sigma_t(x) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega \times [0,T]} f\widetilde{u}\, d\sigma_t(x) - \int_{\partial\Omega \times [0,T]} g\widetilde{v}\, d\sigma_t(x) \\ &= \int_{\partial\Omega \times [0,T]} (f\widetilde{v} + g\widetilde{u})\, d\sigma_t(x) \end{aligned}$$

De plus, par définition, $\tilde{v}$ est solution du même problème que v en inversant le temps (c'est-à-dire en remplaçant "$|t=0$" par "$|t=T$" et g par $\tilde{g}$). On peut donc définir la forme bilinéaire

$$\mathcal{B}_q(f,g) := \int_{\partial\Omega\times[0,T]} (fv+gu)\ d\sigma_t(x)$$

avec $f, g \in C^\infty(\partial\Omega\times[0,T])$ et u solution de

$$\begin{cases} \Box_{t,x}u + qu = 0 & \text{sur } \Omega\times[0,T] \\ u_{|t=0} = \partial_t u_{|t=0} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_\nu u = f & \text{sur } \partial\Omega\times[0,T] \end{cases} \tag{5.2}$$

et v solution de

$$\begin{cases} \Box_{t,x}v + qv = 0 & \text{sur } \Omega\times[0,T] \\ v_{|t=T} = \partial_t v_{|t=T} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_\nu v = g & \text{sur } \partial\Omega\times[0,T] \end{cases} \tag{5.3}$$

De cette façon, l'identifiabilité de q à partir de Λ_q est ramenée à celle de q à partir de $\mathcal{B}_q$.

Prenons donc u et v définies comme ci-dessus respectivement pour f et $g \in C^\infty(\partial\Omega\times[0,T])$, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_q(f,g) &= \int_{\partial\Omega\times[0,T]} (fv+gu)\, d\sigma_t(x) \quad \text{en appliquant Fubini on peut écrire } d\sigma_t(x) = d\sigma(x)dt \\ &= \int_{\partial\Omega\times[0,T]} (\partial_\nu uv + \partial_\nu vu)\ d\sigma(x)dt \\ &= \int_{\Omega\times[0,T]} \nabla_x\cdot(v\nabla_x u + u\nabla_x v)\ dxdt \quad \text{en utilisant les formules de Green} \\ &= \int_{\Omega\times[0,T]} (2\nabla_x u\cdot\nabla_x v + u\Delta_x v + v\Delta_x u)\ dxdt \end{aligned}$$

Or $\Box_{t,x}u + qu = \Box_{t,x}v + qv = 0$ et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_q(f,g) &= \int_{\Omega\times[0,T]} \left(2\nabla_x u\cdot\nabla_x v + 2quv + u\partial^2_{tt}v + v\partial^2_{tt}u\right)\ dxdt \\ &= 2\int_{\Omega\times[0,T]} \left(\nabla_x u\cdot\nabla_x v + quv + \frac{1}{2}(u\partial^2_{tt}v + v\partial^2_{tt}u)\right)\ dxdt \end{aligned}$$

Et en intégrant par parties par rapport à t, comme les conditions de Cauchy sont nulles, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times[0,T]} \left(u\partial^2_{tt}v + v\partial^2_{tt}u\right)\ dxdt &= \int_\Omega \left([u\partial_t v + v\partial_t u]_{t=0}^{t=T} - \int_{t=0}^{t=T} (\partial_t u\partial_t v + \partial_t v\partial_t u)\, dt \right) dx \\ &= -2\int_{\Omega\times[0,T]} \partial_t u\partial_t v\, dxdt \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement l'expression de $\mathcal{B}_q$:

$$\mathcal{B}_q(f,g) = 2\int_{\Omega\times[0,T]} (\nabla_x u\cdot\nabla_x v + quv - \partial_t u\partial_t v)\ dxdt$$

On a donc pour l'instant ramené la démonstration du théorème 5.2 à la question de l'identifiabilité de q à partir de la forme bilinéaire $\mathcal{B}_q$.

5.2.2 Identifiabilité à partir d'une forme bilinéaire

On va donc se focaliser maintenant sur le théorème suivant :

Théorème 5.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné à bord lisse, $\Phi = \psi = 0$ et $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$, $T > 0$.*

$$\text{Si } \mathcal{B}_{q_1} = \mathcal{B}_{q_2} \text{ et } T > diam(\Omega) \text{ alors } q_1 = q_2$$

Soient donc $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ vérifiant $\mathcal{B}_{q_1} = \mathcal{B}_{q_2}$. On introduit pour tous $x \in \Omega$ et $s \in [0,1]$, $q(x,s) = sq_2(x) + (1-s)q_1(x)$.
On notera que u et v, les solutions respectives de 5.2 et 5.3 dépendent maintenant de s et on considérera donc ce dernier paramètre comme une variable des fonctions u, v et q.
Faisons une hypothèse supplémentaire :

Hypothèse 5.1. *$\partial_\nu u$ et $\partial_\nu v$ sont indépendants de s sur $\partial\Omega \times [0,T]$.*

Tout d'abord, établissons un lemme préliminaire qui va permettre de formuler un résultat analogue à la proposition 3.2 du chapitre 3 :

Lemme 5.1. *Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ et q défini comme ci-dessus. Alors pour tout couple (u,v) défini comme précédemment et vérifiant l'hypothèse 5.1, on a*

$$0 = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N \times [0,T]} \dot{q}uv \, dxdtds$$

Avec l'hypothèse 5.1, on a en particulier $\partial_\nu u(\cdot,\cdot,0)_{|\partial\Omega\times[0,T]} = \partial_\nu u(\cdot,\cdot,1)_{|\partial\Omega\times[0,T]}$ et $\partial_\nu v(\cdot,\cdot,0)_{|\partial\Omega\times[0,T]} = \partial_\nu v(\cdot,\cdot,1)_{|\partial\Omega\times[0,T]}$.
Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{B}_{q_2}\left(\partial_\nu u(\cdot,\cdot,0)_{|\partial\Omega\times[0,T]}, \partial_\nu v(\cdot,\cdot,0)_{|\partial\Omega\times[0,T]}\right) - \mathcal{B}_{q_1}\left(\partial_\nu u(\cdot,\cdot,0)_{|\partial\Omega\times[0,T]}, \partial_\nu v(\cdot,\cdot,0)_{|\partial\Omega\times[0,T]}\right) \\
&= \mathcal{B}_{q_2}\left(\partial_\nu u(\cdot,\cdot,1)_{|\partial\Omega\times[0,T]}, \partial_\nu v(\cdot,\cdot,1)_{|\partial\Omega\times[0,T]}\right) - \mathcal{B}_{q_1}\left(\partial_\nu u(\cdot,\cdot,0)_{|\partial\Omega\times[0,T]}, \partial_\nu v(\cdot,\cdot,0)_{|\partial\Omega\times[0,T]}\right) \\
&= \left[\mathcal{B}_q\left(\partial_\nu u(\cdot,\cdot,s)_{|\partial\Omega\times[0,T]}, \partial_\nu v(\cdot,\cdot,s)_{|\partial\Omega\times[0,T]}\right)\right]_0^1 \\
&= 2\left[\int_{\Omega\times[0,T]} \left(\nabla_x u \cdot \nabla_x v + quv - \partial_t u \partial_t v\right) dxdt\right]_{s=0}^{s=1} \\
&= 2\int_{s=0}^{s=1} \left(\frac{d}{ds}\int_{\Omega\times[0,T]} \left(\nabla_x u \cdot \nabla_x v + quv - \partial_t u \partial_t v\right) dxdt\right) ds
\end{aligned}$$

La dépendance en s étant suffisamment régulière pour que la dérivation et l'expression intégrale en s aient un sens, on notera par la suite " $\dot{}$ " la dérivation par rapport à la variable s, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{s=0}^{s=1} \int_{\Omega\times[0,T]} \left(\dot{q}uv + q\dot{u}v + qu\dot{v} + \dot{\nabla_x} u \cdot \nabla_x v + \nabla_x u \cdot \dot{\nabla_x} v - \dot{\partial_t} u \cdot \partial_t v - \partial_t u \cdot \dot{\partial_t} v\right) dxdtds \\
&= \int_{s=0}^{s=1} \int_{\Omega\times[0,T]} \dot{q}uv \, dxdtds + \mathcal{J}
\end{aligned}$$

En intégrant par parties en x et en t (sachant qu'on a des conditions nulles en $t = 0$ et $t = T$) on peut écrire $\mathcal{J}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \int_{s=0}^{s=1} \int_{\Omega\times[0,T]} \left(q\dot{u}v + qu\dot{v} + \dot{\nabla_x} u \cdot \nabla_x v + \nabla_x u \cdot \dot{\nabla_x} v - \dot{\partial_t} u \cdot \partial_t v - \partial_t u \cdot \dot{\partial_t} v\right) dxdtds \\
&= \int_{s=0}^{s=1} \int_{\Omega\times[0,T]} \left(u(\Box_{t,x} + q)\dot{v} + v(\Box_{t,x} + q)\dot{u}\right) dxdtds \\
&\quad + \int_{s=0}^{s=1} \int_{\partial\Omega\times[0,T]} \left(\partial_\nu \dot{u} v + \partial_\nu \dot{v} u\right) d\sigma(x)dtds
\end{aligned}$$

Or en dérivant l'équation vérifiée par u et v, on a :

$$\begin{cases} (\Box_{t,x} + q)\dot{u} = & -\dot{q}u \\ (\Box_{t,x} + q)\dot{v} = & -\dot{q}v \end{cases}$$

et par l'hypothèse 5.1, $\partial_\nu u$ et $\partial_\nu v$ sont indépendants de s sur $\partial\Omega \times [0,T]$. Ce qui implique que, d'une part on ait

$$\dot{u}v + \partial_\nu \dot{v}u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T]$$

et d'autre part

$$u(\Box_{t,x} + q)\dot{v} + v(\Box_{t,x} + q)\dot{u} = -2\dot{q}uv \quad \text{sur } \Omega \times [0,T]$$

Donc finalement

$$0 = \int_{s=0}^{s=1} \int_{\Omega\times[0,T]} \dot{q}uv\, dxdtds$$

Si de plus on prolonge q_1, q_2 par 0 en dehors de Ω, on obtient le résultat annoncé par le lemme :

$$0 = \int_{s=0}^{s=1} \int_{\mathbb{R}^N\times[0,T]} \dot{q}uv\, dxdtds$$

Il va s'agir maintenant de construire une famille de fonctions u et v qui permette de conclure que $\dot{q} = 0$.
Soit $\omega \in \mathbf{S}^{N-1}$, $\sigma > 0$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, notons que le paramètre σ est destiné à tendre vers $+\infty$. On va chercher u sous la forme suivante :

$$u(x,t,s,\omega,\sigma) = \chi(x + t\omega)e^{i\sigma(x\cdot\omega+t)} + R_1(x,t,s,\omega,\sigma)$$

Lemme 5.2. *Il existe une constante C indépendante de σ et de s telle que*

$$\|R_1\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \leq \frac{C}{\sigma}$$

Démonstration. Comme $(\Box_{t,x} + q)u = 0$ et que $\Box_{t,x}\chi(x + t\omega) = 0$, R_1 doit vérifier

$$(\Box_{t,x} + q)R_1 = -(\Box_{t,x} + q)(\chi(x + t\omega)e^{i\sigma(x\cdot\omega+t)}) = -e^{i\sigma(x\cdot\omega+t)}q\,\chi(x + t\omega) \quad \text{sur } \Omega \times [0,T]$$

et

$$R_{1|t=0} = \partial_t R_{1|t=0} = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \partial_\nu R_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T]$$

On pourrait, directement à partir de cette définition, exprimer un contrôle de $\|R_1\|$, mais celui-ci ne dépendrait pas explicitement de σ et n'aurait donc que peu d'utilité.
Ecrivons plutôt que, si on pose $\chi_1 = -q\,\chi$, alors on a pour $t \in [0,T]$

$$(\Box_{t,x} + q)\int_0^t R_1(x,r,s,\omega,\sigma)\, dr = \int_0^t e^{i\sigma(x\cdot\omega+r)}\chi_1(x,r)\, dr$$

De cette façon, en passant de chaque côté à la norme $L^2(\Omega \times [0,T])$ et avec les inégalités triangulaire et de Poincaré :

$$\begin{aligned} \left\|(\partial_{tt}^2 + q - \Delta_x)\int_0^t R_1(x,r,s,\omega,\sigma)\, dr\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} &\geq \left| \left\|(\partial_{tt}^2 + q)\int_0^t R_1(x,r,s,\omega,\sigma)\, dr\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \right. \\ &\quad \left. - \left\|\Delta_x \int_0^t R_1(x,r,s,\omega,\sigma)\, dr\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \right| \\ &\geq c\,\|R_1\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \end{aligned}$$

où $c > 0$ ne dépend que de Ω, T, $\min_{0\le s\le 1} \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\max_{0\le s\le 1} \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$.
De plus, χ_1 étant $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à t, on peut écrire que

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{i\sigma(x\cdot\omega+r)}\chi_1(x,r)\,dr &= \frac{1}{i\sigma}\int_0^t \frac{d}{dr}(e^{i\sigma(x\cdot\omega+r)})\chi_1(x,r)\,dr \\ &= \frac{-1}{i\sigma}\int_0^t e^{i\sigma(x\cdot\omega+r)}\partial_r\chi_1(x,r)\,dr + \frac{1}{i\sigma}\chi_1(x,t)e^{i\sigma(x\cdot\omega+t)} \\ &\quad -\frac{1}{i\sigma}\chi_1(x,0)e^{i\sigma x\cdot\omega}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\|\int_0^t e^{i\sigma(x\cdot\omega+r)}\chi_1(x,r)\,dr\right\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sigma})$$

où la domination ne dépend que de Ω, T, χ, $\min_{0\le s\le 1} \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\max_{0\le s\le 1} \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$.

En associant les deux derniers résultats, on obtient bien l'existence de $C > 0$, indépendante de σ et s telle que

$$\|R_1\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \le \frac{C}{\sigma}$$

□

De plus,

$$supp((x,t)\mapsto \chi(x+t\omega)) = \{(x,t), x \in supp(\chi) - t\omega\}$$

De cette façon, si on choisit χ tel que $supp\,\chi \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, χ s'annule sur un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$ et donc de $\partial\Omega$, alors u est bien une solution de 5.2 vérifiant l'hypothèse 5.1.

Si on fait une construction analogue pour v (avec $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ quelconque) :

$$v(x,t,s,\omega,\sigma) = \rho(x+t\omega)e^{-i\sigma(x\cdot\omega+t)} + R_2(x,t,s,\omega,\sigma)$$

Alors R_2 doit vérifier

$$(\Box_{t,x}+q)R_2 = -(\Box_{t,x}+q)(\rho(x+t\omega)e^{-i\sigma(x\cdot\omega+t)}) = -e^{-i\sigma(x\cdot\omega+t)}q\,\rho(x+t\omega) \quad \text{sur } \Omega\times[0,T]$$

et

$$R_{2|t=T} = \partial_t R_{2|t=T} = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \partial_\nu R_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times[0,T]$$

On obtient de la même façon une constante $C' > 0$ telle que

$$\|R_2\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \le \frac{C'}{\sigma}$$

En faisant les mêmes considérations que précédemment sur les supports, si on choisit ρ tel que $(supp\,\chi - T\omega)\cap\overline{\Omega} = \emptyset$, on a bien une solution v de 5.3 qui vérifie l'hypothèse 5.1.

On a fait l'hypothèse en début de chapitre que $T - diam(\Omega) > 0$, soit donc $\epsilon > 0$ tel que $T - diam(\Omega) = 2\epsilon$.
On défini $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega^c, d(x,\Omega) < \epsilon\}$ qui est la bande extérieure collée à $\partial\Omega$.
Alors d'une part si $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_\epsilon)$, on a

$$supp\,\chi \ \cap \overline{\Omega} = \emptyset$$

D'autre part si $\omega \in \mathbf{S}^{N-1}$, comme $T = 2\epsilon + diam(\Omega)$ alors pour tout $x \in \overline{\Omega}$,

$$d(x+T\omega, x) > diam(\Omega) + \epsilon$$

et donc nécessairement, $x + t\omega \notin \Omega_\epsilon \supset supp\,\chi$. D'où

$$(supp\,\chi - T\omega \cap \overline{\Omega}) = \emptyset$$

De cette façon, on peut effectivement choisir $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ qui vérifie les conditions de support énoncées dans la construction de u et v. On fixe pour la suite $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_\epsilon)$ quelconque et

$$\begin{cases} u(x,t,s,\omega,\sigma) = & \chi(x+t\omega)e^{i\sigma(x\cdot\omega+t)} + R_1(x,t,s,\omega,\sigma) \\ v(x,t,s,\omega,\sigma) = & \chi(x+t\omega)e^{-i\sigma(x\cdot\omega+t)} + R_2(x,t,s,\omega,\sigma) \end{cases}$$

définis comme précédemment vérifient l'hypothèse 5.1.

En injectant u et v sous cette forme dans le résultat du lemme 5.1, on obtient

$$0 = \int_{s=0}^{s=1} \int_{\mathbb{R}^N \times [0,T]} \big(\dot{q}(x)\chi^2(x+t\omega) + R(x,t,s,\omega,\sigma)\big)\, dxdtds$$

avec

$$\begin{aligned} R(x,t,s,\omega,\sigma) &= \chi(x+t\omega)\left(e^{i\sigma(x\cdot\omega+t)}R_2(x,t,s,\omega,\sigma) + e^{-i\sigma(x\cdot\omega+t)}R_1(x,t,s,\omega,\sigma)\right) \\ &\quad + R_1(x,t,s,\omega,\sigma)R_2(x,t,s,\omega,\sigma) \quad \text{où on prolonge par 0 si } x \notin \Omega \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left|\int_{s=0}^{s=1}\int_{\mathbb{R}^N\times[0,T]} R\, dxdtds\right| &\leq \max\left(1, \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) \int_{s=0}^{s=1}\int_{\Omega\times[0,T]} (|R_1| + |R_2| + |R_1\, R_2|)\, dxdtds \\ &\leq \max\left(1, \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) T\,|\Omega| \left(\|R_1\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} + \|R_2\|_{L^2(\Omega\times[0,T])}\right) \\ &\quad + \max\left(1, \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) \|R_1\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \|R_2\|_{L^2(\Omega\times[0,T])} \\ &\leq \frac{c}{\min(\sigma,\sigma^2)} \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive indépendante de s et de σ.

Maintenant, si on fait tendre σ vers $+\infty$, on obtient

$$0 = \int_{s=0}^{s=1}\int_{\mathbb{R}^N\times[0,T]} \dot{q}(x)\chi^2(x+t\omega)\, dxdtds$$

et comme $\dot{q}$ est indépendant de s,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \dot{q}(x) \int_{[0,T]} \chi^2(x+t\omega)\, dt\, dx$$

Par changement de variable et continuité de $\dot{q}$, on a

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \chi^2(x) \int_{[0,T]} \dot{q}(x-t\omega)\, dt\, dx$$

De plus, $\dot{q} = 0$ en dehors de Ω et $T > diam(\Omega)+\epsilon$, donc on peut étendre l'intégrale à $\mathbb{R}^+$ et on reconnait alors la transformé faisceau de χ^2 dans la direction $-\omega$ ce qui donne

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \chi^2(x)\mathcal{I}_{-\omega}\dot{q}(x)\, dx$$

où $w \in \mathbf{S}^{N-1}$ et $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_\epsilon)$ sont quelconques.
Alors on a finalement

$$\mathcal{I}_\omega \dot{q}(x) = 0 \text{ pour tous } x \in \Omega_\epsilon \text{ et } \omega \in \mathbf{S}^{N-1}$$

Soit $\epsilon > \delta > 0$ et $K_\delta := \{x \in \Omega\,,\ d(x,\partial\Omega) \geq \delta\}$, K_δ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^N$, inclus dans Ω. Si on note Σ_ϵ l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^N$ issues d'un point de Ω_ϵ et Σ_δ l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^N$ issues d'un point de K_δ, $\Sigma_\delta \subset \Sigma_\epsilon$. Donc si $x \in K_\delta$ et $\mathcal{H}$ est un hyperplan tel que $x \in \mathcal{H}$, on a nécessairement l'existence d'une droite $\sigma \in \Sigma_\epsilon$ telle que $x \in \sigma$ et $\sigma \subset \mathcal{H}$.
La condition de Tuy-Kirillov (théorème 5.1) permet alors de conclure que $\dot{q}$ est identiquement nulle sur K_δ pour tout $\epsilon > \delta > 0$, et donc finalement $\dot{q} = 0$ sur Ω.
C'est-à-dire

$$q_1 = q_2 \quad \text{sur} \quad \Omega$$

5.3 Potentiel $q(x,t)$

Pour finir, on énonce sans démonstration une extension de ce dernier résultat, consistant à considérer un potentiel q qui soit également dépendant du temps. En effet, si Ω est un ouvert connexe, borné, à bord lisse de $\mathbb{R}^N$, $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$ et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)$, alors le problème

$$\begin{cases} (\Box_{t,x} + q)\, u = & 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \times \Omega \\ u_{|\mathbb{R}\times\partial\Omega} = & f \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{cases} \tag{5.4}$$

admet une unique solution $u^{(q,f)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$ qui s'annule pour t tendant vers $-\infty$.
À chaque potentiel $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$ on associe l'ensemble de couples

$$\mathcal{Y}_q := \left\{ \left(u^{(q,f)}{}_{|\mathbb{R}\times\partial\Omega} \,,\, \partial_\nu u^{(q,f)}{}_{|\mathbb{R}\times\partial\Omega} \right) \ \text{pour} f \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \partial\Omega) \right\}$$

et on note $\widetilde{q}$ le prolongement de q à $\mathbb{R}^{N+1}$ par 0 si $(t,x) \notin \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$.
On a alors un théorème analogue au théorème 5.2 :

Théorème 5.4. *Soient $q_1, q_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$ tels que la différence $\widetilde{q_1} - \widetilde{q_2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$.*

$$\textit{Si} \quad \mathcal{Y}_{q_1} = \mathcal{Y}_{q_2} \quad \textit{alors} \quad q_1 = q_2 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$$

La preuve de ce théorème, loin d'être évidente, fait appel, entre autres, aux notions de calcul symbolique, d'équation eikonale et une nouvelle fois à la transformation faisceau.
L'article [15] fournit deux preuves différentes de ce résultat dont la deuxième permet de descendre en régularité et de considérer $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^\infty(\Omega))$.

Bibliographie

[1] Adams. *Sobolev Spaces.* Elsevier, 1975.

[2] Borg. Eine umkehrung des sturm-liouvilleschen eigenwertaufgabe. *Acta Mathematica*, 1946.

[3] Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, 1993.

[4] Bukhgeim. Recovering a potential from cauchy data in the two-dimensional case. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2008.

[5] David Dos Santos Ferreira. Le problem inverse de la conductivité de calderòn, 2018. `http://irmav9.u-strasbg.fr/MasterClass/support/CalderonProblem.pdf`.

[6] Hamaker, Smith, Solmon, and Wagner. The divergent beam x-ray transform. *Rocky Moutain Journal of mathematics vol.10*, pages 253–283, 1980.

[7] Hirsch and Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 2009.

[8] Isozaki. Some remarks on the multi-dimensional borg-levinson theorem. *Kyoto Journal of Mathematics*, 1991.

[9] Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques.* Springer, 1993.

[10] Kohn and Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements. *Communication in pure and applied mathematics*, pages 289–298, 1984.

[11] Levinson. The inverse sturm-liouville problem. *Matematisk Tidsskrift. B*, 1949.

[12] Lions and Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol 1.* Dunod, 1968.

[13] Nachman, Sylvester, and Uhlmann. An n-dimensional borg-levinson theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 1988.

[14] Palamodov. *Reconstruction from Integral Data.* CRC Press, 2016.

[15] Ramm and Sjöstrand. An inverse problem of the wave equation. *Mathematische Zeitschrift*, pages 119–130, 1991.

[16] Mikko Salo. Calderòn problem, 2008. `http://users.jyu.fi/~salomi/lecturenotes/calderon_lectures.pdf`.

[17] Sylvester and Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Annals of Mathematics*, pages 153–169, 1987.

[18] Tartar. *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces.* Springer, 2007.

[19] Taylor. *Partial Differential Equations.* Springer, 1996.