Introduction aux problèmes inverses

Eulry Hugo

Sous la direction de David Dos Santos Ferreira

27 août 2018

Sommaire

Mise en place du problème

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné à bord lisse, $\gamma \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ strictement positive,

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 \textit{ sur } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \in H^{3/2}(\partial\Omega) \end{cases}$$

Question

Soit l'application

$$\Lambda_\gamma : f \in H^{3/2}(\partial\Omega) \mapsto \gamma \partial_\nu u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

Peut-on retrouver γ à partir de Λ_γ ?
C'est-à-dire

$$\gamma \mapsto \Lambda_\gamma \textit{ est-elle injective ?}$$

Équivalence des problèmes...

On peut réduire l'équation de la conductivité à celle de Schrödinger en remarquant que :

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\gamma\nabla u) &= \sqrt{\gamma}\left(\sqrt{\gamma}\Delta u+\frac{2\nabla\gamma}{2\sqrt{\gamma}}\cdot\nabla u\right)\\ &= -\sqrt{\gamma}\left(-\Delta(\sqrt{\gamma}u)+\frac{\Delta\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma}u\right)\end{aligned}$$

En posant $v=\sqrt{\gamma}u$ et $q=\frac{\Delta\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\in L^{\infty}(\Omega)$, on a :

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\gamma\nabla u)=0 \quad \text{sur } \Omega\\ u_{|\partial\Omega}=f\in H^{3/2}(\partial\Omega)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-\Delta+q)v=0 \quad \text{sur } \Omega\\ v_{|\partial\Omega}=\sqrt{\gamma}f\in H^{3/2}(\partial\Omega)\end{cases}$$

...et des opérateurs Dirichlet-à-Neumann

Si 0 n'est pas valeur propre de Dirichlet de $-\Delta + q$, alors le problème

$$\begin{cases} (-\Delta + q)v = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ v_{|\partial\Omega} = g \in H^{3/2}(\partial\Omega) \end{cases}$$

admet une unique solution faible $u \in H^2(\Omega)$ et l'application Dirichlet-à-Neumann associée est bien définie :

$$\Lambda_q : g \in H^{3/2}(\partial\Omega) \mapsto \partial_\nu v_{|\partial\Omega}$$

On a la correspondance :

$$\Lambda_q = \frac{\partial_\nu \gamma}{2\gamma}_{|\partial\Omega} + \gamma^{-1/2}\Lambda_\gamma(\gamma^{-1/2}\,\cdot)$$

Sommaire

Contexte

On considère le nouveau problème :
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné à bord lisse, $q \in L^\infty(\Omega)$ telle que 0 n'est pas valeur propre de Dircihlet pour $-\Delta + q$,

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u = 0 \ sur \ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f \in H^{3/2}(\partial\Omega) \end{cases}$$

et l'application associée

$$\Lambda_q : f \in H^{3/2}(\partial\Omega) \mapsto \partial_\nu u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

Question

Peut-on retrouver q à partir de Λ_q ?

Théorème de Sylvester et Uhlmann

$N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné à bord lisse,

Théorème (Sylvester et Uhlmann)

Soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ tels que 0 ne soit valeur propre de Dirichlet d'aucun des opérateurs $-\Delta + q_j$, $j = 1, 2$, alors

$$\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2} \Rightarrow q_1 = q_2$$

Corollaire

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ à valeurs > 0, tels que 0 ne soit valeur propre de Dirichlet d'aucun des opérateurs $-\Delta + q_j$, $j = 1, 2$ où $q_j = \frac{\Delta\sqrt{\gamma_j}}{\sqrt{\gamma_j}}$, alors

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$$

Mise en équation

Soient $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$ solutions respectives pour $j = 1, 2$ de

$$\begin{cases} (-\Delta + q_j)u = 0 \ sur \ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = f_j \in H^{3/2}(\partial\Omega) \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 u_2 \, dx &= \int_\Omega (\Delta u_1 \, u_2 - u_1 \Delta u_2) \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu u_1 \, u_2 - u_1 \partial_\nu u_2) \, d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} (\Lambda_{q_1} f_1 \, f_2 - f_1 \Lambda_{q_2} f_2) \, d\sigma(x) \end{aligned}$$

Λ_q est autoadjoint

$$\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 u_2 \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(\Lambda_{q_1} f_1 \, f_2 - f_1 \Lambda_{q_2} f_2\right) \, d\sigma(x)$$

est vraie pour tous $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$, donc en particulier pour $q = q_1 = q_2$ quelconque, vérifiant l'hypothèse aux valeurs propres,

$$\forall f_1, f_2 \in H^{3/2}(\partial\Omega)\,, \; \int_{\partial\Omega} \Lambda_q f_1 \, f_2 \, d\sigma(x) = \int_{\partial\Omega} f_1 \Lambda_q f_2 \, d\sigma(x)$$

Un théorème plus fort

Donc si $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$, on a pour tout couple de solutions $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 u_2 \, dx &= \int_{\partial\Omega} \left(\Lambda_{q_1} f_1 \, f_2 - f_1 \Lambda_{q_2} f_2\right) \, d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}\right) f_1 \, f_2 \, d\sigma(x) = 0\end{aligned}$$

Théorème

Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant $\int_\Omega q u_1 u_2 \, dx = 0$ pour tout couple $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ de solutions faibles de $-\Delta u + q_j u = 0$.
Alors $q = 0$.

Première approximation : équation sans potentiel

Le problème de l'injectivité de $q \mapsto \Lambda_q$ n'est pas linéaire !

Question

Si $q \in L^\infty(\Omega)$ vérifie $\int_\Omega q u_1 u_2 \, dx = 0$ pour tout couple de fonctions harmoniques, a-t-on q=0 ?

$$\text{Soit } \Gamma := \left\{ \zeta = \eta + i\xi \in \mathbb{C}^N, \ |\eta|^2 = |\xi|^2 \text{ et } \eta \perp \xi \right\}$$

Alors $\forall \zeta \in \Gamma$, $u_1 : x \mapsto e^{\zeta \cdot x}$ et $u_2 : x \mapsto e^{\overline{\zeta} \cdot x}$ sont harmoniques.
Si on choisit $\xi \in \mathbb{R}^N$ arbitraire, η choisi en conséquence, alors $\zeta = \frac{1}{2}(\eta + i\xi) \in \Gamma$ et en prolongeant q par 0 en dehors de Ω :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \ \int_\Omega q(x) e^{(\zeta - \overline{\zeta}) \cdot x} \, dx = \int_\Omega q(x) e^{i\xi \cdot x} \, dx = \widehat{q}(-\xi) = 0$$

Solutions de l'optique géométrique complexe

On cherche des solutions sous la forme $u(x) = e^{\zeta \cdot x}(1 + r(x))$ où r est un terme correctif.

Théorème

Soit $q \in L^\infty(\Omega)$, il existe des constantes $c, h_0 > 0$ telles que pour tout $\forall h \in]0, h_0]$ et $\zeta = \theta + i\omega \in \boldsymbol{S}^{N-1} + i\boldsymbol{S}^{N-1}$ avec $\theta \perp \omega$ il existe une solution faible de $(-\Delta + q)u = 0$ sur Ω de la forme

$$u(x) = e^{\zeta \cdot x/h}(1+r(x,\zeta,h)) \quad \text{avec} \quad \|r(\cdot,\zeta,h)\|_{L^2(\Omega)} \leq ch\|q\|_{L^\infty(\Omega)}$$

On prend u_1, u_2 données par le théorème précédent :
$u_j = e^{\zeta_j \cdot x/h}(1 + r_j)$,

$$\int_\Omega q u_1 u_2 \, dx = \int_\Omega q e^{(\zeta_1 + \zeta 2)\cdot x/h}(1 + r_1 + r_2 + r_1 r_2) \, dx = 0$$

On peut choisir librement ζ_1, ζ_2 dans $\Gamma \cap (\mathbf{S}^{N-1} + i\mathbf{S}^{N-1})$:

$$\zeta_1 = \theta - i\frac{h}{2}\xi + i\eta\,,\ \zeta_2 = -\theta - i\frac{h}{2}\xi - i\eta\,,\ |\xi| \leq \frac{2}{h},\ \theta \in \mathbf{S}^{N-1}$$

Alors $\zeta_1 + \zeta_2 = -ih\xi$ et on impose

$$\eta \perp \xi \perp \theta \quad \text{et} \quad 1 = |\eta|^2 + \frac{h^2|\xi|^2}{4}$$

$$\forall |\xi| \leq \frac{2}{h}, \int_\Omega q u_1 u_2 \, dx = \widehat{q}(\xi) + \int_\Omega q e^{-i\xi\cdot x}(r_1 + r_2 + r_1 r_2) \, dx = 0$$

et

$$\int_\Omega q e^{-i\xi\cdot x}(r_1 + r_2 + r_1 r_2) \, dx = \mathcal{O}(h) \quad \text{quand } h \to 0$$

Donc finalement en faisant $h \to 0$, on a $q = 0$.
En prenant $q = q_1 - q_2$, on a le résultat :

$$\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2} \Rightarrow q_1 = q_2$$