# Domaines nodaux des fonctions propres du Laplacien

Eulry Hugo

Sous la direction de Suresh Eswarathasan et Dmitry Jakobson
McGill University, Montreal

28 août 2019

# Sommaire

1. Introduction et quelques résultats généraux
   - Rappels de géométrie Riemannienne
   - Opérateur de Laplace-Beltrami
   - Pourquoi le Laplacien ?
   - Résultats classiques
2. Harmoniques sphériques

## Définition (Variétés Riemanniennes)

*Une variété Riemannienne est une paire* $(M, g)$ *avec :*

- $M$ *est une variété différentielle* $\mathcal{C}^\infty$
- $g : x \in M \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_{g(x)}$ *où* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{g(x)}$ *est une forme bilinéaire, positive, non-dégénérée sur* $T_x M$ *telle que, pour tous champs de vecteurs lisses* $X$ *et* $Y$*, l'application* $x \mapsto \langle X(x), Y(x) \rangle_{g(x)}$ *est lisse.*

Exemples :

$\mathbb{R}^d$ : comme $\mathbb{R}^d$ est un espace euclidien :

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{S}^2$ : en coordonnées sphériques $(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ sur $(0, \pi) \times (0, 2\pi)$ :

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite, on considère $(M, g)$ une variété Riemannienne orientée, compacte, connexe, de dimension $d$ :

## Définition (Opérateurs différentiels classiques)

*On définit les opérateurs gradient $\nabla_g$ et divergence $div_g$ de manière analogue au cadre euclidien. L'opérateur de Laplace Beltrami est alors :*

$$\Delta_g := div_g (\nabla_g \cdot)$$

## Théorème (Théorème spectral)

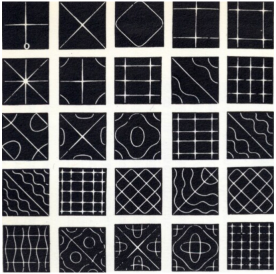
*Si $\partial M = \emptyset$ ou si $\partial M$ est lisse, avec conditions de Dirichlet au bord, alors les valeurs propres de $-\Delta_g$ forment une suite :*
$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty$
*De plus, il existe une base orthonormée de $L^2(M)$ formée de fonctions propres lisses $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$.*

# Pourquoi le Laplacien ?

## Définition (Domaines nodaux)

*On note $Z(\varphi_n) := \varphi_n^{-1}(\{0\})$ où $\varphi_n$ vérifie $-\Delta_g \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, un domaine nodal de $\varphi_n$ est une composante connexe de $M \setminus Z(\varphi_n)$, une courbe nodale est une composante connexe de $Z(\varphi_n)$.*

"Chladni patterns" : une membrane est saupoudrée de sable et mise en vibration à une fréquence $\lambda$.
Les lignes formées correspondent à $Z(\varphi_\lambda)$ si $\lambda$ est bien valeur propre.



# Résultats classiques

**Théorème (Courant, 1953)**

$$N\left(\varphi_n\right) \leq n$$

*où $N(\varphi_n)$ est le nombre de courbes nodales de $\varphi_n$*

**Conjecture (Yau, 1982)**

$$c\sqrt{\lambda_n} \leq \mathcal{H}^{d-1}\left(Z(\varphi_n)\right) \leq C\sqrt{\lambda_n}$$

**Théorème (Hezari-Sogge, 2012)**

$$\sqrt{\lambda_n}\left(\int_M \varphi_n\right)^2 \leq C\mathcal{H}^{d-1}\left(Z(\varphi_n)\right)$$

# Sommaire

1 Introduction et quelques résultats généraux

2 Harmoniques sphériques
- Définition
- Théorème de concentration de Nazarov et Sodin
- Optimalité du résultat
- Idée de la preuve

# Spectre sur $\mathbb{S}^2$

La suite des valeurs propres distinctes de $-\Delta_{\mathbb{S}^2}$ est $\{n(n+1)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$, chacune avec multiplicité $2n+1$. Les fonctions propres correspondantes sont données par :

$$\forall\, |m| \leq n \in \mathbb{N},\ y_n^m(\theta,\varphi) := \begin{cases} P_n(\cos\theta) & \text{si } m = 0 \\ \cos(m\varphi)\ P_n^m(\cos\theta) & \text{si } m > 0 \\ \sin(-m\varphi)\ P_n^{-m}(\cos\theta) & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

où $P_n^m(t) = \left(1-t^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t)$ et $P_n$ est le $n$-ième polynôme de Legendre de première espèce : $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left(t^2-1\right)^n$

On note $\mathcal{H}_n(\mathbb{S}^2)$ l'espace propre associé à la valeur propre $n(n+1)$, de dimension $2n+1$.

# Harmoniques sphériques aléatoires

On considère des fonctions aléatoires de $\mathcal{H}_n(\mathbb{S}^2)$ :

$$f_n = \sum_{|k| \leq n} \xi_k Y_k$$

où les $(\xi_k)_{|k|\leq n}$ sont iid $\mathcal{N}\left(0\,,\, \frac{1}{2n+1}\right)$ et $(Y_k)_{|k|\leq n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_n(\mathbb{S}^2)$.

# Théorème de Nazarov et Sodin

But : améliorer le théorème de Courant et donner une valeur typique pour $N(f_n)$ sur la sphère.

**Théorème (Nazarov-Sodin : concentration exponentielle)**

$$\exists\, a > 0 \textit{ tel que } \frac{\mathbb{E}[N(f_n)]}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$$

$$\textit{et } \forall \epsilon > 0 \textit{ et } n \textit{ assez grand},\ \mathbb{P}\left( \left| \frac{N(f_n)}{n^2} - a \right| > \epsilon \right) \leq C(\epsilon) e^{-c(\epsilon) n}$$

Idée de la preuve :

(i) Montrer que $\mathbb{E}\left[N(f_n)\right] \gtrsim n^2$

(ii) Montrer que $\frac{N(f_n)}{n^2}$ se concentre autour de sa médiane $a_n$

(iii) Montrer que $\frac{\mathbb{E}[N(f_n)]}{n^2}$ converge

# Un résultat optimal

Le caractère exponentiel de la concentration ne peut pas être amélioré :

**Théorème (Nazarov-Sodin)**

*Pour $\kappa > 0$ quelconque et $n$ assez grand,*

$$\mathbb{P}\left(N\left(f_n\right) < \kappa n^2\right) \geq e^{-C(\kappa)n}$$

Idée : la fonction $Y_0(\theta, \varphi) := \sqrt{2n+1}\, P_n(\cos\theta)$ est un harmonique sphérique de degré $n$, $\|Y_0\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} = 1$ et $Z(Y_0)$ consiste en une union disjointe de $n$ cercles de latitude constante sur $\mathbb{S}^2$.

$$\text{On considère} \quad f_n = \xi_0 Y_0 + \sum_{\substack{|k|\leq n \\ k\neq 0}} \xi_k Y_k \quad \text{et} \quad g_n = f_n - \xi_0 Y_0$$

# Contexte de la preuve

On définit l'événement :

$$\Omega = \{\xi_0^2 \geq 1\} \cap \left\{ \|g_n\|^2_{L^2(\mathbb{S}^2)} \leq \rho^2 \right\}$$

avec $\rho > 0$ à définir plus tard en fonction de $\kappa$.
Alors, par indépendance :

$$\mathbb{P}(\Omega) \geq e^{-C(\rho)n}$$

Il suffit donc de montrer que $\Omega$ implique $\left\{ N(f_n) < \kappa n^2 \right\}$.

On se place donc dans le cas où $\Omega$ se produit.

# 1-ère étape : Couvrir la sphère

## Proposition (Zonal spherical harmonic)

$$\exists c_0 > 0 \quad \textit{tel que} \quad Y_0^2 + \frac{1}{n^2} |\nabla_{\mathbb{S}^2} Y_0|^2 \geq c_0^2 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{S}^2$$

On recouvre $\mathbb{S}^2$ avec environ $n^2/R^2$ disques de rayon $R/n$ : $\mathcal{D}_j$ pour $j \in J$.

## Définition (Bons et mauvais disques)

*Un disque $\mathcal{D}_j$ est dit bon si $g_n$ est une petite perturbation sur le disque $3\mathcal{D}_j$ :*

$$\max_{3\mathcal{D}_j} \left\{ |g_n| + \frac{1}{n} |\nabla_{\mathbb{S}^2} g_n| \right\} < \frac{1}{2} c_0$$

# Séparation des cas

Soit $R > 0$ à fixer en fonction de $\kappa$ plus tard.

**Lemme (Résultats directs)**

*Le nombre de mauvais disques est majoré par $C\rho^2 n^2$.*
*On ne peut pas avoir $|f_n(x)| < \frac{1}{2}c_0$ et $|\nabla_{\mathbb{S}^2} f_n| < \frac{n}{2}c_0$ simultanément sur $3\mathcal{D}_j$ si $\mathcal{D}_j$ est un bon disque.*

Si $\Gamma$ est une composante connexe de $Z(f_n)$, on distingue 3 cas :

(i) $diam(\Gamma) \geq R/n$

(ii) $diam(\Gamma) \leq R/n$ et $\Gamma$ intersecte un mauvais disque

(iii) $diam(\Gamma) \leq R/n$ et $\Gamma$ intersecte un bon disque

Cas $(i)$ : comme $|Z(Y_0)| \lesssim n$, le nombre de composantes de type $(i)$ est majoré par $CR^{-1}n^2$.

# Inégalité de Faber-Krahn

**Proposition (Faber-Krahn pour $f_n$)**

*Si $\Omega$ est un domain nodal de $f_n$ alors $|\Omega| \geq cn^{-2}$, où $c > 0$ est une constante absolue.*

Cas $(ii)$ : si $\Gamma$ intersecte un mauvais disque $\mathcal{D}_k$, $\Gamma \subset 3\mathcal{D}_k$.
Toutes les composantes de type $(ii)$ sont donc comprises dans

$$\bigcup_{\mathcal{D}_k \text{ mauvais disque}} 3\mathcal{D}_k$$

$$\Rightarrow \quad \text{au plus } C\rho^2 R^2 n^2 \text{ composantes de type } (ii)$$

# Résultat géométrique

## Proposition

*Soit un disque $\mathcal{D}$ et $F, G \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ telles que $\sup_{\mathcal{D}} |G| < \mu$ et pour $x \in \mathcal{D}$, $|F(x)| > \mu$ ou $|\nabla_g F(x)| > \nu$. Alors, chaque composante $\Gamma$ de $Z(F)$ telle que $d(\Gamma, \partial\mathcal{D}) > \mu/\nu$ engendre une composante différente $\widetilde{\Gamma}$ de $Z(F+G)$ telle que $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma_{+\mu/\nu}$.*

En prenant $F = f_n$, $G = -g_n$, $\mu = \frac{1}{2}c_0$ et $\nu = \frac{n}{2}c_0$, chaque composante de type $(iii)$ $\Gamma$ génère une composante $\widetilde{\Gamma}$ de $Z(Y_0)$ avec $diam\left(\widetilde{\Gamma}\right) \leq \frac{R+2}{n}$.

$$\Rightarrow \text{ au plus } N_{\frac{R+2}{n}}(Y_0) \text{ composantes de type } (iii)$$

# Zéros de $P_n$

## Proposition

*$Z(Y_0)$ est une union de cercles sur $\mathbb{S}^2$ de latitude constante $\theta_k$ tels que :*

$$\forall k \in [\![1\,,\,n]\!]\,,\ \frac{2k-1}{2n+1}\pi < \theta_k < \frac{2k}{2n+1}\pi$$

$$\Rightarrow\ N_{\frac{R+2}{n}}(Y_0) \text{ est borné quand } n \to \infty$$

Donc le nombre de composantes de chaque type est au plus :

type $(i)$ : $CR^{-1}n^2$  type $(ii)$ : $C\rho^2R^2n^2$  type $(iii)$ : $C$

Avec $R \simeq \kappa^{-1}$ et $\rho \simeq \kappa^{-1/2}$, on a $N(f_n) < \kappa n^2$ pour $n$ assez grand.