Calcul paracontrolé et EDPs singulières

Hugo Eulry

Sous la direction de : Ismaël Bailleul

7 Janvier 2021

Equations singulières

Soit $\mathscr{L} := \partial_t - \Delta_x$ et ζ un bruit blanc gaussien (en espace ou temps-espace) :

- Equation d'Anderson parabolique :

$$\mathscr{L} u(t,x) = f\big(u(t,x)\big)\zeta(x)$$

- Equation KPZ :

$$\mathscr{L} u(t,x) = (Du(t,x))^2 + \zeta(t,x)$$

- Equation Φ^4 :

$$\mathscr{L} u(t,x) = u(t,x)^3 + \zeta(t,x)$$

Sommaire

Rappels et notations

On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathbb{T}^d = \left(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}\right)^d$ le tore.
On notera $\mathscr{D}' := \mathscr{D}'\left(\mathbb{T}^d\right)$ et $\mathcal{C}^\infty := \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$.

Définition (Transformée de Fourier)

Pour $f \in \mathscr{D}'$ on définit : $\mathscr{F}f = \hat{f} : k \in \mathbb{Z}^d \mapsto \left\langle f, e^{-ik\cdot}\right\rangle \in \mathbb{C}$
et pour $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}$: $\mathscr{F}^{-1}g := (2\pi)^{-d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} g_k e^{ik\cdot} \in \mathscr{D}'$

$\mathscr{F}$ est bien définie sur $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{F}^{-1}$ est bien définie dès que g est à croissance sous-polynomiale.
Sous ces conditions on a $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}f = f$ et $\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}g = g$ et $\mathscr{F}\left[f_1 * f_2\right] = \hat{f}_1\hat{f}_2$.
En particulier, f est $\mathcal{C}^\infty$ si $\hat{f}$ est à support compact.

Décomposition de Littlewood-Paley

Définition (Partition dyadique de l'unité)

On appelle partition dyadique de l'unité un couple (χ, ρ) *de fonctions* $\mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}\right)$, *positives, radiales, telles que* $supp(\chi) \subset B(0, c)$ *et* $supp(\rho) \subset \{a \leq |\xi| \leq b\}$ *(pour un certain choix des constantes* $a, b, c > 0$*) et satisfaisant :*

$$\sum_{j \geq -1} \rho_j \equiv 1 \quad \text{et} \quad \rho_j \, \rho_i \equiv 0 \text{ pour } |i - j| \geq 2$$

où $\rho_j := \rho(2^{-j} \cdot)$ *pour* $j \geq 0$ *et* $\rho_{-1} := \chi$

On notera $\Delta_j f := \mathscr{F}^{-1}\left[\rho_j \hat{f}\right]$ et $S_j f := \sum_{i=-1}^{j-1} \Delta_i f$ de sorte que :

$$f = \lim_{j \to +\infty} S_j f = \sum_{j \geq -1} \Delta_j f \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'$$

Régularité des distributions

On fixe pour toute la suite une partition de l'unité (χ, ρ).

Définition (Espaces de Besov)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$, on définit l'espace :

$$\mathscr{B}^{\alpha}_{p,q} := \left\{ f \in \mathscr{D}' \,,\; \left(\sum_{j \geq -1} \left(2^{j\alpha} \left\| \Delta_j f \right\|_{L^p} \right)^q \right)^{1/q} < +\infty \right\}$$

muni de la norme $\|f\|_{\mathscr{B}^{\alpha}_{p,q}} := \left\| \left(2^{j\alpha} \left\| \Delta_j f \right\|_{L^p} \right)_{j \geq -1} \right\|_{l^q}$.
On note $\mathscr{C}^\alpha := \mathscr{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}$.

Intuitivement, $\|\cdot\|_{\mathscr{B}^{\alpha}_{p,q}}$ permet de mesurer le comportement de f à hautes fréquences.

Résultats fondamentaux sur les espaces de Besov

Lemme (Une caractérisation)

Soit $\mathscr{A}$ un anneau (resp. B une boule), $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha > 0$), $(u_j)_{j\geq -1} \in \mathcal{C}^\infty$ tel que pour $j \geq -1$, $\mathrm{supp}(\widehat{u_j}) \subset 2^j B$ (resp. $\mathrm{supp}(\widehat{u_j}) \subset 2^j B$) et $\sup_{j\geq -1} 2^{j\alpha} \|u_j\|_{L^\infty} < +\infty$, alors :

$$u := \sum_{j\geq -1} u_j \in \mathscr{C}^\alpha \quad \text{et} \quad \|u\|_{\mathscr{C}^\alpha} \lesssim \sup_{j\geq -1} 2^{j\alpha} \|u_j\|_{L^\infty}$$

$\rightarrow \mathscr{C}^\alpha$ ne dépend pas de (χ, ρ).

Proposition (Inégalité de Bernstein)

Soit B une boule, $1 \leq p, q \leq +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ et $u \in L^p$:

$$\text{si } \mathrm{supp}(\hat{u}) \subset \lambda B\,, \ \max_{|\mu|=k} \|\partial^\mu u\|_{L^q} \lesssim_k \lambda^{k+d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{L^p}$$

Conséquences de Bernstein

- Injections de Besov :

pour $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ et $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq +\infty$, l'injection

$$\mathscr{B}^{\alpha}_{p_1,q_1} \hookrightarrow \mathscr{B}^{\alpha - d\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)}_{p_2,q_2} \text{ est continue}$$

- pour $\mu \in \mathbb{N}^d$, $\partial^{\mu} : \mathscr{C}^{\alpha} \to \mathscr{C}^{\alpha - |\mu|}$ est continue
- $\mathscr{C}^{\alpha}$ est une "bonne" notion de régularité des fonctions au sens où :

Proposition (Espaces de Hölder)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^{\alpha}$ coïncide avec $\mathcal{C}^{\alpha}$ l'espace des fonctions α-Hölder et les normes sont équivalentes.

Remarque : l'inclusion $\mathcal{C}^n \subset \mathscr{C}^n$ est stricte pour $n \in \mathbb{N}$.

Sommaire

Un contre-exemple classique

On n'a pas (en général) de notion de produit pour les distributions :

Exemple

$x \mapsto x$, δ_0 et $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ sont dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, si on avait un produit "convenable" sur $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ alors :

$$(\delta_0 \times x) \times vp\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \times vp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

et

$$\delta_0 \times \left(x \times vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \delta_0 \times 1 = \delta_0$$

Décomposition de Bony

Pour $f, g \in \mathscr{D}'$, on a formellement

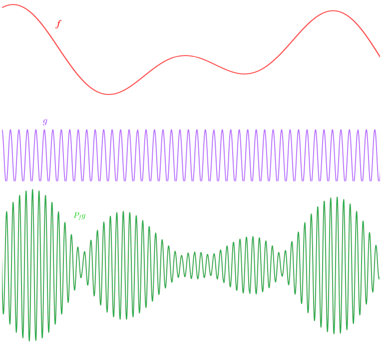
$$\begin{aligned} fg &= \sum_{i<j-1} \Delta_i f \Delta_j g + \sum_{|i-j|\leq 1} \Delta_i f \Delta_j g + \sum_{j<i-1} \Delta_i f \Delta_j g \\ &=: P_f g + \Pi(f,g) + P_g f \end{aligned}$$

- $P_f g = \sum_{i<j-1} \Delta_i f \Delta_j g$

$\rightarrow$ paraproduit de g par f
$P_f g$ est une modulation de g par f

- $\Pi(f,g) = \sum_{|i-j|\leq 1} \Delta_i f \Delta_j g$

$\rightarrow$ résonance de f et g



Paraproduits et résonance

Théorème (Opérateurs paraproduit et résonance)

P et Π sont des opérateurs bilinéaires, Π est symétrique, satisfaisant les estimations suivantes :
si $f \in \mathscr{C}^{\alpha}$, $g \in \mathscr{C}^{\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

- $\|P_f g\|_{\mathscr{C}^{\beta}} \lesssim \|f\|_{\mathscr{C}^{\alpha}} \|g\|_{\mathscr{C}^{\beta}}$ *si* $\alpha > 0$
- $\|P_f g\|_{\mathscr{C}^{\alpha+\beta}} \lesssim \|f\|_{\mathscr{C}^{\alpha}} \|g\|_{\mathscr{C}^{\beta}}$ *si* $\alpha < 0$
- $\|\Pi(f,g)\|_{\mathscr{C}^{\alpha+\beta}} \lesssim \|f\|_{\mathscr{C}^{\alpha}} \|g\|_{\mathscr{C}^{\beta}}$ *si* $\alpha + \beta > 0$

Dans le cas où $\alpha = 0$, on a : $P_f g \in \mathscr{C}^{\beta'}$ pour tout $\beta' < \beta$.

$\rightarrow$ un paraproduit $P_f g$ est toujours bien défini
$\rightarrow$ le seul problème vient du terme de résonance $\Pi(f,g)$

$\alpha + \beta > 0$ est une "barrière"

Question

La condition $\alpha + \beta > 0$ pour définir $\Pi : \mathscr{C}^\alpha \times \mathscr{C}^\beta \to \mathscr{C}^{\alpha+\beta}$ comme un opérateur continu est-elle optimale ?

$\to$ oui

Pour $d = 1$: on pose $a_n(x) := n^{-\alpha} e^{inx}$ et $b_n(x) := n^{-\beta} e^{-inx}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Alors : $\Delta_j a_n = n^{-\alpha} \rho_j(n) e^{in\cdot}$ et $\Delta_j b_n = n^{-\beta} \rho_j(-n) e^{-in\cdot}$

Donc $a_n \to 0$ dans $\mathscr{C}^{\alpha'}$ et $b_n \to 0$ dans $\mathscr{C}^{\beta'}$ pour tous $\alpha' < \alpha$, $\beta' < \beta$.

Mais $a_n b_n = n^{-(\alpha+\beta)}$, ne tend pas vers 0 si $\alpha + \beta \leq 0$.

Correcteur

Théorème (Opérateur correcteur)

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta + \gamma > 0$ et $\beta + \gamma < 0$,

$$C : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty \times \mathcal{C}^\infty \times \mathcal{C}^\infty & \to & \mathcal{C}^\infty \\ (f, g, h) & \mapsto & \Pi(P_f g, h) - f\Pi(g, h) \end{array} \right.$$

est un opérateur trilinéaire vérifiant

$$\forall f, g, h \in \mathcal{C}^\infty, \ \|C(f, g, h)\|_{\mathscr{C}^{\alpha+\beta+\gamma}} \lesssim \|f\|_{\mathscr{C}^\alpha} \|g\|_{\mathscr{C}^\beta} \|h\|_{\mathscr{C}^\gamma}$$

et donc s'étend de façon unique de $\mathscr{C}^\alpha \times \mathscr{C}^\beta \times \mathscr{C}^\gamma$ vers $\mathscr{C}^{\alpha+\beta+\gamma}$

$\to$ permet d'étudier le produit $\tilde{g}h$ pour $\tilde{g}$ qui "ressemble" à g.

Sommaire

Régularité d'un bruit blanc

On appelle bruit blanc sur $\mathbb{T}^d$ un processus gaussien ζ centré, indexé par $L^2(\mathbb{T}^d)$, de noyau de covariance :

$$\forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T}^d)\,,\ \mathbb{E}\left[\zeta(\varphi)\zeta(\psi)\right] = \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(x)\psi(x)\, dx$$

Proposition (Régularité)

$\zeta \in \mathscr{C}^{\alpha-\epsilon}$ *presque sûrement, pour* $\alpha = -\frac{d}{2}$ *et tout* $\epsilon > 0$

Preuve : pour $p \geq 1$ on montre que $\zeta \in \mathscr{B}^{\alpha}_{p,p}$ p.s. :

$$\mathbb{E}\left[\|\zeta\|^p_{\mathscr{B}^{\alpha}_{p,p}}\right] \lesssim \sum_k 2^{(\alpha p)k}\left(\int_{\mathbb{T}^d} \mathbb{E}\left[|\Delta_k\zeta|^p\right]\right)$$

$$\mathbb{E}\left[|\Delta_k\zeta|^p\right] \lesssim \mathbb{E}\left[|\Delta_k\zeta|^2\right]^{p/2} \lesssim \|K_k\|^p_{L^2} \lesssim 2^{-kd\frac{p}{2}}$$

où $\Delta_k\zeta = K_k * \zeta = \zeta\left(K_k(-\cdot)\right)$.

Equation d'Anderson parabolique : cas linéaire

Soit u_0 à préciser, ζ un bruit blanc en espace, $\mathscr{L} = \partial_t - \Delta_x$, on veut résoudre

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = u\zeta \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Comme $\mathscr{L}^{-1}$ régularise en espace et $\zeta \in \mathscr{C}^{-1^-}$ on peut espérer $u \in \mathscr{C}^{1^-}$ en espace

$\rightarrow$ on a un problème de définition pour $u\zeta$

On va isoler la partie mal définie pour n'avoir plus qu'à définir un terme mal posé uniquement à partir de l'équation.

Recherche du terme problématique

Soit $\alpha \in (2/3, 1)$, u une solution $\mathscr{C}^{\alpha}$ en espace, supposons que u "ressemble" à $Z \in \mathscr{C}^{\alpha}$ (dépendant seulement de l'équation) :

$$u = P_a Z + b \quad \text{avec } a \in \mathscr{C}^{\alpha}, \; b \in \mathscr{C}^{2\alpha}$$

Alors :

$$\begin{aligned} u\zeta &= P_u\zeta + P_\zeta u + \Pi(u, \zeta) \\ &= P_u\zeta + P_\zeta u + \Pi(P_a Z, \zeta) + \Pi(b, \zeta) \\ &= \underbrace{P_u\zeta + P_\zeta u + \Pi(b, \zeta) + C(a, Z, \zeta)}_{\text{(bien définis)}} + a\Pi(Z, \zeta) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ le seul terme mal défini est $\Pi(Z, \zeta)$, on s'attend à ce qu'il soit de régularité $\mathscr{C}^{2\alpha - 2}$.

Structure des solutions

Supposons qu'on puisse donner un sens au terme de résonance $\Pi(u,\zeta)$: on attend la régularité $\mathscr{C}^{2\alpha-2}$, alors :

$$u\zeta = P_u\zeta + P_\zeta u + \Pi(u,\zeta) = P_u\zeta + u_1^{\#}$$

pour $u_1^{\#} \in \mathscr{C}^{2\alpha-2}$, et $P_u\zeta \in \mathscr{C}^{\alpha-2}$.
On utilise le fait que u est une solution :

$$\begin{aligned} u &= P_u\left(\mathscr{L}^{-1}\zeta\right) + \left[\mathscr{L}^{-1}, P_u\right]\zeta + \mathscr{L}^{-1}u_1^{\#} \\ &= P_u Z + u_2^{\#} \end{aligned}$$

avec $u_2^{\#} \in \mathscr{C}^{2\alpha}$.
$\rightarrow$ u a bien une structure paracontrolée par $Z := \mathscr{L}^{-1}\zeta \in \mathscr{C}^{\alpha}$: ne dépend que de l'équation

Raffinement du problème

Une obstruction majeure à la résolution :

$$\Pi(Z, \zeta)$$

On suppose qu'avec l'équation sont fournis :

- le bruit blanc en espace ζ
- la résonance $\Pi(Z, \zeta)$ avec régularité $\mathscr{C}^{2\alpha-2}$

$\rightarrow (\zeta, \Pi(Z, \zeta))$: version raffinée du bruit.
La construction de $\Pi(Z, \zeta)$ est purement probabiliste, ne dépend pas de l'équation :

$$\Pi(Z, \zeta) = \mathbb{P}\text{-}\lim_{\epsilon \to 0} \Pi(Z_\epsilon, \zeta_\epsilon) - c_\epsilon$$

où Z_ϵ, ζ_ϵ sont des régularisations du bruit et $c_\epsilon \to +\infty$ est déterministe.

Formulation point fixe

Une solution u n'est pas seulement $\mathscr{C}^{\alpha}$, mais a une structure. On écrit u sous sa forme paracontrolée par Z :

$$u = P_a Z + b \quad \text{avec } a \in \mathscr{C}^{\alpha}\,, \ \ b \in \mathscr{C}^{2\alpha}$$

et

$$u = P_u Z + u_2^{\#}(a, b)$$

$$\begin{cases} a = P_a Z + b \\ b = u_2^{\#}(a, b) \end{cases} \Rightarrow \ \Phi_{\zeta, Z, \Pi(Z,\zeta)}(a, b) = (a, b)$$

où $\Phi : \mathscr{C}^{\alpha} \times \mathscr{C}^{2\alpha} \to \mathscr{C}^{\alpha} \times \mathscr{C}^{2\alpha}$ ne dépend que du bruit.
$\to$ on peut espérer faire un point fixe en temps court.

Paralinearisation

Si $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, on traite de la même façon

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f(u)\zeta \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Lemme (Lemme de Bony)

Soit $\alpha \in (0,1)$, $u \in \mathscr{C}^\alpha$ et $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, alors $f(u)$ est paracontrolé par u. Il existe $f^\#(u) \in \mathscr{C}^{2\alpha}$ tel que

$$f(u) = P_{f'(u)}u + f^\#(u)$$

Corollaire

Si de plus $u = P_a Z + b$ avec $b \in \mathscr{C}^{2\alpha}$, alors $f(u) = P_{af'(u)}Z + \tilde{b}$ avec $\tilde{b} \in \mathscr{C}^{2\alpha}$.

Cadre espace-temps

On tient compte de la dépendance en temps via les espaces paraboliques, si $\alpha \in (0,2)$ on note :

$$\mathscr{L}^{\alpha} := \mathcal{C}\mathscr{C}^{\alpha} \cap \mathcal{C}^{\alpha/2}L^{\infty} \quad \text{et} \quad \mathscr{L}^{\alpha}_{T} := \mathcal{C}_{T}\mathscr{C}^{\alpha} \cap \mathcal{C}^{\alpha/2}_{T}L^{\infty}$$

Définition (Distributions paracontrolées)

Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta \in (0,2)$, soit $g \in \mathscr{L}^{\alpha}$. On dit que $(f, f') \in \mathscr{L}^{\alpha} \times \mathscr{L}^{\beta}$ est paracontrolé par g s'il existe $f^{\#} \in \mathscr{L}^{\alpha+\beta}$ tel que :

$$f = P_{f'}g + f^{\#}, \quad \text{on note } f \in \mathscr{D}^{\beta}(g)$$

Pour $T > 0$, on note : $\|f\|_{\mathscr{D}^{\beta}_{T}(g)} := \|f'\|_{\mathscr{L}^{\beta}_{T}} + \|f^{\#}\|_{\mathscr{L}^{\alpha+\beta}_{T}}$

Un cadre rigoureux pour la résolution

Théorème (Estimées de Schauder)

Soient $\alpha \in (0,1)$, $\beta > 0$ *tels que* $\alpha + \beta \in (0,2)$, $g \in C\mathscr{C}^{\alpha-2}$ *et* G *tel que* $\mathscr{L} G = g$ *avec* $G(0) = 0$. *Soit* $f' \in \mathscr{L}^\beta$, $f^\# \in C^{\alpha+\beta-2}$ *et* $u_0 \in \mathscr{C}^{\alpha+\beta}$. *Alors* (u, f') *où* $\mathscr{L} u = P_{f'} g + f^\#$ *avec* $u(0) = u_0$ *est paracontrolé par* G *:*

$$u = P_{f'} G + u^\# \quad \text{où } u^\# \in \mathscr{L}^{\alpha+\beta}$$

Si de plus g *ne dépend pas de* t *on a :*

$$\|u\|_{\mathscr{D}^\beta_T(G)} \lesssim \|u_0\|_{\mathscr{C}^{\alpha+\beta}} + (1+T)\,\|f\|_{\mathscr{D}^\beta(g)}$$

Résolution de l'équation

En prenant $\alpha = \beta$, $g = \zeta$ et $u_0 \in \mathscr{C}^{2\alpha}$, la solution v de $\mathscr{L} v = u\zeta$ avec $v(0) = u_0$ est paracontrolée par Z dès que $u \in \mathscr{D}^{\alpha}(Z)$,

$$\Phi_T : \left| \begin{array}{l} \mathscr{D}^{\alpha}_T(Z) \to \mathscr{D}^{\alpha}_T(Z) \\ u_{|[0,T)} \mapsto v_{|[0,T)} \end{array} \right.$$

est bien défini pour tout $T > 0$.

Si $\|u_0\|_{\mathscr{C}^{2\alpha}} \leq M$, $C(M) > 0$ bien choisie, pour $T(M)$ assez petit $\mathbb{X}_M := \left\{ u \in \mathscr{D}^{\alpha}_T(Z)\,,\ u(0) = u_0\,,\ \|u\|_{\mathscr{D}^{\alpha}_T(Z)} \leq C(M) \right\}$ est stable par Φ_T.

Pour $T(M) > 0$ possiblement plus petit, Φ_T est une contraction.

$\rightarrow$ existence et unicité de la solution de

$$\begin{cases} \mathscr{L} u = u\zeta \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \\ u(0) = u_0 \in \mathscr{C}^{2\alpha} \end{cases}$$