Ex 1 : On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n := \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$

1) Justifier que R_n est bien défini pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$R_n = c \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

3) En déduire la nature de $\left(\sum_{n \geq 0} R_n\right)$

4) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$

Ex 2 : Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n := \frac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que $\left(\sum_{n \geq 0} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n \geq 0} v_n\right)$ ont même nature

Ex 3 : Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$$

Ex 4 : 1) Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n := \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$. On pose $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Déterminer la nature de $\left(\sum v_n\right)$

2) En déduire l'existence de $C > 0$ tel que

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

Ex 5 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t) dt$

Montrer que la série $\left(\sum u_n\right)$ converge

Ex 6 : Posons $\varphi : x > 0 \mapsto \frac{1}{x^2} e^{1/x}$.

1) Montrer que φ est décroissante, continue et calculer $\int_a^b \varphi(x) dx$ pour $b \geq a > 0$

2) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} e^{n/k}$

Ex 7 : Fixons $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, déterminer la nature de la série de terme général :

- $u_n = \binom{n+p}{p}^{-\alpha}$
- $v_n = (-1)^n \binom{n+p}{p}^{-\alpha}$

Ex 8 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, convexe, de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt$$

et

$$\int_a^b f(t) dt \leq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Ex 9 1) Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1+e^x)$, montrer que f est convexe.

2) Soit $(x_p)_{1 \leq p \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, montrer que

$$1 + \left(\prod_{p=1}^n x_p\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{p=1}^n (1+x_p)\right)^{1/n}$$

3) En déduire que pour tout $(a_p)_{1 \leq p \leq n}, (b_p)_{1 \leq p \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on a

$$\left(\prod_{p=1}^n a_p\right)^{1/n} + \left(\prod_{p=1}^n b_p\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{p=1}^n (a_p + b_p)\right)^{1/n}$$