**Jérémy Bettinger**
*École Normale Supérieure de Rennes*
jeremy.bettinger@ens-rennes.fr


# 100 Exercices de sup à spé

## ANALYSE

### Exercice 1 : Théorème de Cesàro et applications

1. (a) Montrer que si $u$ est une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge vers $\ell$.
   (b) Etudier la réciproque.
2. Soit $u$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ converge vers $\ell$. Montrer que $\displaystyle\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. Soit $u$ une suite de réels strictement positifs convergenant vers $\ell > 0$. Montrer que $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

### Exercice 2 : Transformation d'Abel et applications

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes réels ou complexes, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes réels et $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Démontrer la transformation d'Abel :
$$\sum_{n=0}^{p} u_n v_n = S_p v_p - \sum_{n=0}^{p-1} S_n (v_{n+1} - v_n).$$
2. Démontrer que si l'on suppose la suite $(S_n)$ bornée et la suite $(v_n)$ à termes positifs, décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum u_n\, v_n$ converge.
3. (Application) Etudier suivant les valeurs des réels $\alpha$ et $\theta$ la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

   En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

### Exercice 3 : Suite dans $\mathbb{N}$

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$.

1. Montrer que $a_p$ existe puis exprimer $a_p$ en fonction de $a_0, \dots, a_{p-1}$.
2. En déduire que $a_p \in \mathbb{N}$.

## Exercice 4 : Équation de Pell-Fermat

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions avec $x, y \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \geqslant 1$. Démontrer qu'il existe deux entiers $x_n$ et $y_n$ tels que $(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}\ y_n$.
2. Exprimer $x_{n+1}$ et $y_{n+1}$ en fonction de $x_n$ et $y_n$.
3. En déduire que les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont strictement croissantes.
4. Démontrer le théorème de Pell-Fermat.

## Exercice 5 : Calcul d'une somme de série (CCINP)

On pose pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer la convergence de la série de terme général $a_n$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln 2$.
3. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

## Exercice 6 : Calcul de somme

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

## Exercice 7 : Convergence de séries : condition nécessaire et suffisante ?

1. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels positifs. Est ce que si $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum u_n$ converge ?
2. Montrer que si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante positive et $\sum u_n$ converge alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

## Exercice 8 : Etude d'une série définie avec une somme (Mines)

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $U_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt[k]{k}}$. Donner la nature de $\sum U_n$.

## Exercice 9 : Limite d'une série

Déterminer $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

## Exercice 10 : Etude d'une série (Mines)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. On pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{S_n}$ avec $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

## Exercice 11 : Série définie avec un reste (X)

Soit $(u_n)$ une suite réelle strictement positive telle que la série de terme général $u_n$ converge.

On note le reste d'ordre $n$ $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Etudier la nature des séries de termes généraux $u_n/R_n$ et $u_n/R_{n-1}$.

## Exercice 12 : Série avec arctan

Donner la nature de la série de terme général $u_n = \arctan(a+n) - \arctan(n)$ pour $a > 0$.

## Exercice 13 : Règle de Raabe-Duhamel faible

Soit $(u_n)$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$, on pose $v_n = \ln\left((n+1)^\beta u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\beta u_n\right)$.

1. Pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence de la série de terme général $v_n$ ?
2. En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} c\, n^\alpha$.

## Exercice 14 : Série ln

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, determiner la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 1} (\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$ et calculer sa somme si possible.

## Exercice 15 : Série d'une intégrale (Mines)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) \neq 0$.

Étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\int_0^{1/n} f(t^n)\, dt$.

## Exercice 16 : Équivalent d'une suite (Mines PSI)

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite $\ell$.
2. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. On pose $M = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f''(t)|$.

   Montrer que pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

   $$\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{6n^3}.$$

   En déduire une majoration de :

   $$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

3. En appliquant la question précédente à une bonne fonction $f$, préciser un équivalent simple de $\ell - u_n$.

## Exercice 17 : Convergence d'une suite et d'une série (Mines PC)

1. Étudier en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la convergence de la suite $(u_n)$ définie par :

   $$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

2. On considère la série de terme général $u_n$.
   (a) Étudier en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la convergence de la série de terme général $u_n$.
   (b) En cas de convergence, calculer sa somme.
   (c) En cas de convergence, déterminer un équivalent de son reste d'ordre $n$.

## Exercice 18 : Radicaux itérés

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}$.

1. Écrire une formule de récurrence liant $u_{n-1}$ et $u_n$.
2. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée. En déduire un équivalent de $u_n$.

## Exercice 19 : Méthode de Héron (CCINP TSI)

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 > 0$ et par la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2 - a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que si $n \geqslant 1$ alors $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\sqrt{a}$.
4. Donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$ et pour $n \geqslant 1$ montrer que : $u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$.

## Exercice 20 : Nombres irrationnels

Montrer qu'il existe deux nombres irrationnels X et Y tel que $X^Y$ est rationnel.

## Exercice 21 : Un calcul de limite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}$.

## Exercice 22 : Inégalité fonctionelle

Soit $f$ une fonction réelle non constante. Montrer qu'il existe deux réels $x, y$ tels que $f(x+y) < f(xy)$.

## Exercice 23 : Équation fonctionnelle (X)

Trouver toutes les fonctions $f$ dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2, f(x+h) - f(x) = f'(x)h$.

## Exercice 24 : Détermination d'une fonction 1-périodique

On suppose que $f$ est une fonction réelle, continue et 1-périodique telle que pour tout réel $x$, $f(nx)$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

1. Montrer que pour tout entier $k$, $f(k) = 0$.
2. Montrer que pour tout élément rationnel $\lambda$ on a $f(\lambda) = 0$. En déduire $f$.

## Exercice 25 : Équation fonctionnelle (Centrale PSI)

On considère une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$ et donner $f(\lambda x)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que $f$ est continue en 0. Montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ puis expliciter $f$.
3. Supposons $f$ uniquement bornée au voisinage de 0. Montrer que $f$ est continue en 0 et conclure.

# ALGEBRE

## Exercice 26 : Polynômes

Soit $P$ un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant l'équation : $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

1. Montrer que si $a$ est une racine $a^2$ aussi. En déduire que $a = 0$ ou $|a| = 1$.
2. Montrer que 0 n'est pas racine de $P$.
3. Montrer que si $a$ est une racine de $P$ alors $|a+1| = 1$.
4. En déduire les racines de $P$ et son expression.

## Exercice 27 : Calcul d'une intégrale (Mines)

Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}}\right)$.
   Préciser alors dans $\mathbb{R}[X]$, la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ selon la parité de $n$.
2. Soit $x$ un nombre réel différent de 1 et de -1.
   (a) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos(t) + 1\right)\, dt$.
   (b) Calculer $I$ en utilisant la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ avec $n$ pair.

## Exercice 28 : Nombre de racines (Mines PC)

Soit $n \geqslant 2$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n$.
Montrer que si $P$ a $n$ racines réelles distinctes, alors $Q = P^2 + 1$ a $2n$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

## Exercice 29 : Reste d'un polynôme

Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels strictement positifs et soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

Pour chaque $k \in [\![0; n]\!]$, on note $r_k$ le reste de la division euclidienne de $k$ par $p$.

Démontrer que le reste de la division euclidienne de $P$ par $X^p - 1$ est le polynôme $R(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^{r_k}$.

## Exercice 30 : Polynôme dérivé

Déterminer les polynômes $P$ de degré supérieur ou égal à 1 et tels que $P'$ divise $P$.

## Exercice 31 : Positivité d'un polynôme

Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ est positif sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

## Exercice 32 : Produit de sinus

1. Donner la décomposition en produits de polynômes irréductibles de $X^n - 1$.
2. En déduire celle de $1 + X + \cdots + X^{n-1}$.
3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
4. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

## Exercice 33 : Résolution de système avec paramètre (Mines Telecom PC)

Résoudre, selon $m \in \mathbb{R}$, le système : $\begin{cases} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= m \\ x + y + mz &= m^2 \end{cases}$.

## Exercice 34 : Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité (Mines Telecom)

Soit $n \geqslant 1$ et $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. On pose

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_n & \to & \mathbb{U}_n \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}.$$

1. Pour quelles valeurs de $n$, $f$ est-elle bijective ?
2. Pour quelles valeurs de $n$, $f \circ f = Id_{\mathbb{U}_n}$ ?

## Exercice 35 : Permutations et probabilités (CCINP)

Soit $n \geqslant 2$. On considère l'univers $\Omega$ de l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de la probabilité uniforme, c'est-à-dire que chaque permutation peut être choisie avec la même probabilité $\frac{1}{n!}$.
Si $\sigma \in \Omega$, on définit, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, la variable aléatoire $X_k$ par $X_k(\sigma) = 1$ si $k$ est un point fixe de $\sigma$ (c'est-à-dire $\sigma(k) = k$) et 0 sinon. On note $N$ la variable aléatoire qui à $\sigma$ associe son nombre de points fixes.

1. Décrire la loi de $X_k$. Calculer $\mathrm{E}(X_k)$ et $\mathrm{V}(X_k)$.
2. Calculer $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
3. Calculer $\mathrm{P}(N = n)$, $\mathrm{P}(N = n-1)$ et $\mathrm{P}(N = n-2)$.
4. Exprimer $N$ en fonction des $X_k$.
5. En déduire $\mathrm{E}(N)$ et $\mathrm{V}(N)$.

# ALGEBRE LINEAIRE

## Exercice 36 : Suites des noyaux et images itérés

On considère E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On note $d_i = \dim \mathrm{Ker}(f^i)$ et $m_j = \dim \mathrm{Im}(f^i)$.

1. (Suite des noyaux itérés)
   (a) Démontrer que $\forall i \geqslant 0,\ \mathrm{Ker}(f^i) \subset \mathrm{Ker}(f^{i+1})$.
   (b) Dans cette question, on suppose qu'il existe $r \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1})$.
   Démontrer que $\forall i \geqslant r,\ \mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i+1})$.
   (c) i. Montrer que la suite $(d_i)$ est monotone.
   ii. Démontrer qu'il existe $r \leqslant n$ tel que : $d_r = d_{r+1}$.
   iii. Montrer que la suite $(d_i)$ est stationnaire.
2. (Suite des images itérées)
   (a) Démontrer que $\forall j \geqslant 0,\ \mathrm{Im}(f^{j+1}) \subset \mathrm{Im}(f^j)$.
   (b) Dans cette question, on suppose qu'il existe $s \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Im}(f^s) = \mathrm{Im}(f^{s+1})$.
   Démontrer que $\forall j \geqslant s,\ \mathrm{Im}(f^j) = \mathrm{Im}(f^{j+1})$.
   (c) i. Montrer que la suite $(m_j)$ est monotone.
   ii. Démontrer que : $m_r = m_{r+1}$ avec $r$ précédemment défini.
   iii. Montrer que la suite $(m_j)$ est stationnaire.

## Exercice 37 : Endomorphisme cyclique (ENSAM PSI)

Soit $u$ un endomorphisme de E, un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension $n$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0$ tel que $\mathcal{S} = (u(x_0), u^2(x_0), ..., u^n(x_0))$ est libre.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
2. Ecrire la matrice $M$ de $u$ dans cette base. Calculer le polynôme caractéristique de $M$.
3. Montrez que les sous-espaces propres de $u$ sont de dimension 1 et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $u$ soit diagonalisable.
4. On choisit $n = 4$ et $u^4(x_0) = x_0$. Donnez la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$. Est-il diagonalisable ?

## Exercice 38 : Existence d'une matrice inversible (Centrale)

Soit $G$ l'ensemble des matrices $M(a) = \begin{pmatrix} -3 & 9a & -4+3a \\ -1 & 1+3a & -1+a \\ 3 & -9a & 4-3a \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $G$ est un groupe multiplicatif. Est-il abélien ?
2. Reconnaître $M(0)$. Déterminer Ker $M(0)$ et Im $M(0)$.
3. Montrer : $\exists P \in \mathcal{G}L_3(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}, P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## Exercice 39 : Supplémentaire ? (Mines PC)

1. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$ tel que $u \circ u = u$.
   Montrer que : Ker $u \bigoplus$ Im $u = E$. A-t-on encore le résultat si $E$ n'est plus de dimension finie ?
2. Soient maintenant $E$ et $F$ deux espaces vectoriels (non nécessairement de dimensions finies).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = Id_E$. Montrer que Ker $v \bigoplus$ Im $u = F$.

## Exercice 40 : Matrice de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer que $A^2 = Tr(A)A$.

## Exercice 41 : Calcul de trace

Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = A$.
Après avoir exprimé $A^pB - BA^p$ en fonction de $A^p$, calculer la trace de $A^{2021}$.

## Exercice 42 : Inverse de $A - I_n$

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente alors $A - I_n$ est inversible et déterminer son inverse.

## Exercice 43 : Lemme de Hadamard

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est à diagonale strictement dominante si $\forall i \in [\![1;n]\!]\ |a_{i,i}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$. Montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

## Exercice 44 : Matrice à coefficients entiers

Soit $p$ un nombre premier et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $Tr\left((A+B)^p)\right) = Tr\left(A^p\right) + Tr\left(B^p\right) [p]$
2. En déduire que $Tr\left(A^p\right) = Tr\left(A\right) [p]$
3. Soit $(u_n)$ la suite récurrente définie par $u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$.
   Montrer que $p$ divise $u_p$ pour tout $p$ premier.

## Exercice 45 : Matrice de Pascal

Calculer l'inverse de la matrice de Pascal $T$, triangulaire supérieure, où ses coefficients valent $T(i,j) = \binom{j}{i}$.

## Exercice 46 : Exercice étonnant d'application

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls et les autres sont 1 ou $-1$.

1. On suppose dans cette question que $n$ est pair.
   a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $M^2 = I_n + 2A$.
   b) En déduire que $M$ est inversible.
2. On suppose ici que $n$ est impair. Démontrer que dim Ker(M) $\leqslant 1$.
3. Un jardinier a récolté 17 pommes. Il constate que, chaque fois qu'il retire une pomme de sa récolte, il peut partager les fruits restants en deux tas de même poids contenant chacun 8 pommes.
   Montrer que toutes les pommes ont le même poids.

## Exercice 47 : Calcul de déterminant (Mines)

Soit $n \geqslant 2, a, b, c$ trois réels et on définit $A(a,b,c) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :
• les coefficients de la principale sont égaux à $a$ ;
• tous les coefficients au dessus de la diagonale principale sont égaux à $b$ ;
• tous les coefficients en dessous de la diagonale principale sont égaux à $c$.
On introduit la matrice $J$ n'ayant que des 1 pour coefficients et $P(x) = \det\left(A(a,b,c) + xJ\right)$.

1. Montrer que $P$ est un polynôme de degré au plus 1.
2. On suppose $b \neq c$. Déterminer $\det(A(a,b,c))$ en fonction de $a, b, c$ et $n$.
3. En utilisant la question 2, calculer $\det(A(a,b,c))$ dans le cas où $b = c$.

## Exercice 48 : Inégalités sur le rang

Soient $E$ et $F$ de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

## Exercice 49 : Positivité (Mines PC)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A^2 + I_n) \geqslant 0$.

## Exercice 50 : Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $AM = MA$.

## Exercice 51 : Projecteurs (CCINP)

Soient $p$ et $q$ deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que $p$ est un projecteur si et seulement si $id - p$ est un projecteur.
3. Déduire des deux premières questions que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$.

## Exercice 52 : Bezout sur les matrices ? (Mines)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux.
Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $UA + VB = I_n$.

## Exercice 53 : Matrice et dimension

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\begin{cases} A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA) \\ AB - BA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$. Montrer que $n$ est un multiple de 6.

## Exercice 54 : Étude d'une application (X)

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application non constante vérifiant : $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(A)f(B)$.
Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $f(A) \neq 0$.

Indication : On commencera par montrer qu'une matrice carrée est non inversible si et seulement si elle est équivalente à une matrice nilpotente.

## Exercice 55 : Inversibilité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ soit inversible et que $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

## Exercice 56 : Déterminer les éléments propres

Soit $E$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On définit $\phi : E \to E$ par $\phi(f)(t) = f'(t) + tf(t)$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\phi$.

## Exercice 57 : Détermination d'éléments propres (CCINP)

On pose $E = \mathbb{R}_4[X]$. Soit $\Phi : E \to E$ telle que $\forall P \in E,\ \Phi(P)(X) = P(X) + 2X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$.
Démontrer que $\Phi$ est un endomorphisme puis déterminer ses vecteurs et valeurs propres.

## Exercice 58 : Avec des coefficients binomiaux

Soient $n \geqslant 1$, $p \geqslant 0$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix}.$$

## Exercice 59 : Déterminant trigonal

Soit $\Delta_n$ le déterminant de taille $n$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
2. En déduire la valeur de $\Delta_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

## Exercice 60 : Décomposition QR (Centrale)

Soit $A$ une matrice reelle inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices $(Q, R)$, où $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R$ une matrice triangulaire superieure dont tous les éléments diagonaux sont positifs, tel que $A = QR$.

## Exercice 61 : Trace d'un endomorphisme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = MA$.
Vérifier que $\varphi$ définit un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis exprimer sa trace en fonction de celle de $A$.

## Exercice 62 : Endomorphisme

Quels sont les endomorphismes $f$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$ ?

## Exercice 63 : Comatrice (Mines PSI)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de celui de $A$.
2. Résoudre pour $n \geqslant 3$, $\mathrm{Com}(A) = A$.
3. Déterminer $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$.

## Exercice 64 : Limite particulière (ENTPE)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B$.
Montrer que $B$ est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1 sur la diagonale.

## Exercice 65 : Matrice orthogonale

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice commutant avec sa transposée. Montrer que $B = {}^tA^{-1}A$ est orthogonale.

## Exercice 66 : Antisymétrie

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est antisymétrique.

## Exercice 67 : CNS pour que la matrice soit orthogonale

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $S = a + b + c$, $\sigma = ab + bc + ca$, et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $M \in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.
2. Démontrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.

## Exercice 68 : Matrice orthogonale (Mines)

Soit $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $(A + 2B)/3 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire de $A$ et $B$ ?

## Exercice 69 : Similitudes

Soit $E$ un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$.
On dit que $f$ est une similitude de rapport $\lambda$ si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u + v \perp u - v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que $f$ est une similitude de rapport $\lambda$ si et seulement si, $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle$.
3. On souhaite prouver que $f$ est une similitude si et seulement $f$ est non-nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple $(x, y) \in E$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.
   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Réciproquement, on suppose que $f$ est non-nulle et préserve l'orthogonalité. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $E$. Démontrer que, pour tout couple $(i, j)$, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Puis conclure.

## Exercice 70 : Diagonalisable donc symétrique

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ diagonalisable. Montrer que $f$ est une symétrie.

## Exercice 71 : Existence d'une isométrie

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ conservant l'orthogonalité : $\forall (x,y) \in E^2, \langle x,y\rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.

1. Calculer $\langle u+v, u-v\rangle$ pour tout $u,v$ vecteurs unitaires.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant : $\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \alpha\|x\|$.
3. Conclure qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha g$.

## Exercice 72 : Calcul d'un inf 1

Après avoir justifié l'existence et l'unicité, calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\, dx$.

## Exercice 73 : Calcul d'un inf 2 (Mines)

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2(\ln(t) - at - b)^2\, dt$.

## Exercice 74 : Calcul d'un inf 3 (Magistère ENS Rennes)

On pose $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt.$$

1. Montrer que $\langle . \, , . \rangle$ définit un produit scalaire sur $E$.
2. On pose
$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{f \in E \mid f \in \mathcal{C}^2,\ f'' = f\}.$$
Montrer que $V$ et $W$ sont supplémentaires et orthogonaux. Exprimer la projection orthogonale sur $W$.
3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $E_{\alpha,\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta\}$. Calculer
$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 f(t)^2 + f'(t)^2\, dt.$$

## Exercice 75 : Existence d'un polynôme ? (X)

On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = \langle A, P\rangle$ ?

## Exercice 76 : Convergence faible et forte (CCINP)

Soit E un espace préhilbertien réel muni de son produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de sa norme associée $\|.\|$. On dit que $(x_n)_n$ converge **fortement** vers $x$ si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.
$(x_n)_n$ converge **faiblement** vers $x$ si $\forall y \in E \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - x, y\rangle = 0$.

1. Montrer que si $(x_n)_n$ converge faiblement, sa limite est unique.
2. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.
3. Montrer que $(x_n)$ converge fortement vers $x$ $\iff$ $(x_n)$ converge faiblement vers $x$ et $\|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|x\|$.
4. Montrer qu'en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.
5. Montrer que si $(x_n)$ converge faiblement vers $x$ et que si $(y_n)$ converge fortement vers $y$ alors la suite $(\langle x_n, y_n\rangle)_n$ converge vers $\langle x, y\rangle$. *On admet que si $(x_n)$ converge faiblement alors $(x_n)$ est bornée.*

## Exercice 77 : Polynômes de Laguerre

On pose, pour tout entier naturel $n$ et pour tout réel $x$,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Calculer explicitement $L_0, L_1, L_2$.
2. Montrer que, pour tout entier $n$, $L_n$ est une fonction polynômiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.
3. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

   Démontrer que $\varphi$ est bien définie.
4. Démontrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(L_0, X^n)$.
6. (a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x).$$

   (b) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall p \in \{0, \dots, n\},\ \varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx.$$

7. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

## Exercice 78 : Polynômes de Tchebychev

On désigne par $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $E_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n$, où $n$ est un entier naturel.

1. Existence et unicité
   (a) Démontrer qu'il existe un polynôme $T$ à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$ vérifiant la propriété ($\heartsuit$) :

$$(\heartsuit) :\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

   (on pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).
   (b) Démontrer qu'un polynôme vérifiant ($\heartsuit$) est unique. On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice $n$, on le note $T_n$.
2. On définit alors sur $[-1,1]$ une fonction polynômiale par

$$\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

   (a) Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

   (b) Calculer $T_0, T_1, T_2, T_3$.
   (c) Quel est le degré de $T_n$ ? Quel est le terme du coefficient de plus haut degré de $T_n$ ?
3. Orthogonalité
   (a) Montrer que, pour toutes fonctions $f, g$ dans $E$, l'application $t \mapsto \dfrac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.
   (b) Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Justifier que c'est bien un produit scalaire sur $E$.
   (c) Calculer $\langle T_n, T_m\rangle$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.

## Exercice 79 : Supplémentaires

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge }\}$.

## Exercice 80 : Produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$

On considère l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable muni de son produit scalaire canonique $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. On note $F$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{R})$ différent de $\ell^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. En déduire que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

# PROBABILITES

## Exercice 81 : Inégalité de Bonferroni

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \dots A_n$ des évènements. Montrer l'inégalité de Bonferroni :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) - (n-1).$$

## Exercice 82 : Inégalité de Paley-Zygmund

Soit $Z$ une variable aléatoire positives et $\theta \in ]0;1[$. Montrer que

$$P(Z \geqslant \theta E[Z]) \geqslant (1-\theta)^2 \frac{E[Z]^2}{E[Z^2]}$$

## Exercice 83 : Équivalent d'une probabilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant $n$ boules noires et $n$ boules blanches. On effectue $n$ tirages sans remise. À chacun de ces tirages, on tire simultanément 2 boules. On note $A$ l'événement chacun des tirages est constitué de 2 boules de couleurs différentes et $A_k$ l'événement "le $k$-ème tirage est constitué de 2 boules de couleurs différentes".

1. Déterminer $P(A_1)$.
2. Montrer que
$$P\left(A_k \mid \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \frac{n-k+1}{2(n-k+1)-1}$$
3. Exprimer $A$ en fonction des $A_k$.
4. En déduire que $p_n := P(A) = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$ puis un équivalent de $p_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

## Exercice 84 : Loi faible pour des sommes de Bernoulli

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini $\Omega$. On suppose que, pour chaque $i \geqslant 1$, $X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i$ et que les $(X_i)$ sont deux à deux indépendantes. On pose

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad m_n = \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

## Exercice 85 : Comparaison d'espérances

Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini. Démontrer que $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$.

## Exercice 86 : Mensonges

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile.
Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ?

## Exercice 87 : Indépendance ? (Centrale)

Soit $(U,V)$ un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2,1/2)$.
On pose $S=(U-1)^2+(V-1)^2$ et $T=(U-1)(V-1)+1$.

1. Déterminer la loi de $S$.
2. Calculer $E(S(T-1))$.
3. Déterminer la loi de $T$.
4. Calculer la covariance de $(S,T)$.
5. Les variables $S$ et $T$ sont-elles indépendantes ?

## Exercice 88 : Une autre expression de l'espérance

Soit $X$ une variable aléatoire discrète. Démontrer que : $E(X)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X>n)$.

## Exercice 89 : Estimation

1. Montrer que si $X$ suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors $\forall \epsilon>0 \quad P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$.
2. On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers minimal pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 diffère de 1/6 d'au plus 1/100 ?

## Exercice 90 : Loi géométrique (École Navale Centrale)

Soient $X,Y$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$.
Pour $k\in\mathbb{N}^*$, calculer $P(X\geqslant kY)$.

## Exercice 91 : Inégalité d'espérance (Mines)

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs strictement positives.
Montrer que $E\left(\frac{X}{Y}\right)\geqslant 1$.

## Exercice 92 : Loi de Hardy-Weinberg

Un gène présent dans une population est formé de 2 allèles A et a. Un individu peut donc avoir l'un des trois génotypes suivants : AA, Aa, aa. Un enfant lors de la conception hérite d'un allèle de chacun de ses parents, choisi au hasard. Ainsi si le père est du type AA et la mère de type Aa, les enfants peuvent être du type AA ou Aa. On considère une population (génération 0) et on note $p_0$, $q_0$ et $r_0$ les proportions respectives des génotypes AA, Aa et aa. On admet que les couples se forment au hasard indépendamment des génotypes considérés.

1. Donner en fonction de $p_0$, $q_0$, $r_0$ la probabilité $p_1$ qu'un enfant de la génération 1 ait un génotype AA.
2. Donner de même $r_1$, puis $q_1$.
3. Démontrer que $p_1$, $q_1$ et $r_1$ s'expriment uniquement en fonction de $\alpha=p_0-r_0$. Que vaut $p_1-r_1$ ?
4. Donner les probabilités $p_2,q_2,r_2$ pour qu'un enfant de la génération 2 ait pour génotype respectivement AA, Aa et aa. Que peut-on conclure ?

## Exercice 93 : Etude d'un cas concret

Un joueur tire sur une cible de 10 cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1, 2, ..., 10 cm et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne $k$ est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer.
Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Le joueur gagne $k$ euros s'il atteint la couronne numérotée $k$ pour $6 \leqslant k \leqslant 10$, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

## Exercice 94 : Chaussettes (Mines PC)

On dispose de $m$ chaussettes que l'on range aléatoirement dans une commode comportant $n$ tiroirs numérotés.

1. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, déterminer la loi de la variable $X_k$ donnant le nombre de chaussettes rangées dans le tiroir $k$.
2. Donner l'espérance de la variable $Y$ déterminant le nombre de tiroirs vides.

## Exercice 95 : Du calcul (CCINP)

Soit $\lambda > 0$ et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R$ définie par $R(X) = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
2. Calculer $\lambda$.
3. Prouver que $X$ admet une espérance, puis la calculer. Admet-elle une variance ? Justifier.

## Exercice 96 : Centre téléphonique (Mines PC)

Un centre téléphonique a une liste de $n$ contacts, chacun ayant une probabilité $p$ d'être appelé et de répondre à l'appel. Au premier tour, on appelle les $n$ contacts et au second tour seulement ceux qui n'ont pas répondu au premier tour. On note $X$ et $Y$ les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de personnes répondant à l'appel au premier et au second tour.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. Déterminer, pour $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, $P(Y = k | X = i)$. En déduire la loi de $Y$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$ et déterminer $E(X + Y)$ de deux manières.

## Exercice 97 : Fonction indicatrice d'Euler

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier $x$ dans $[\![1;n]\!]$.
Pour tout entier $m \leqslant n$, on note $A_m$ l'événement « $m$ divise $x$ », $B$ l'événement « $x$ est premier avec $n$ », et $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de $n$.

1. Exprimer $B$ en fonction des $A_{p_k}$.
2. Pour tout entier naturel $m$ qui divise $n$, calculer $A_m$.
3. Montrer que les évènements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
4. En déduire la probabilité de $B$.
5. $\phi(n)$ est le nombre d'entiers compris entre 1 et $n$ premiers avec $n$. Montrer que $\phi(n) = n \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

## Exercice 98 : Additivité de la loi de Poisson

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif $\lambda$ et $\mu$.
Démontrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

## Exercice 99 : Premier lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_n$ une suite d'évènements. On note $A = \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geqslant 0} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$.

Pour $n \geqslant 1$ on note $D_n = \bigcup_{k\geqslant n} A_k$. On suppose que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$.

Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ puis en déduire que $\mathbb{P}(A) = 0$.

## Exercice 100 : Deuxième lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_n$ une suite d'évènements. On note $A = \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geqslant 0} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$.

On suppose les $(A_n)_n$ indépendants. Soit $n \leqslant N$. On note $E_{n,N} = \bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}$ et $E_n = \bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}$.

On suppose que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ et on souhaite prouver que $\mathbb{P}(A) = 1$.

1. Justifier que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$ puis démontrer que $\lim_{N\to+\infty} \ln(\mathbb{P}(E_{n,N})) = -\infty$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(E_n) = 0$ et que $\mathbb{P}(A) = 1$.