Le théorème des nombres premiers

Mémoire de stage de recherche

Jérémy BETTINGER

École Normale Supérieure de Rennes

Sous la supervision de Gérald Tenenbaum

À l'Institut Élie Cartan de Lorraine,
Laboratoire de recherche en mathématiques,
Théorie analytique des nombres

Avec le soutien de l'Association des Membres
de l'Ordre des Palmes Académiques

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **Monsieur le Président de l'Association des Membres de l'Ordre des Palmes Académiques** pour la bourse d'étude qui m'a permis d'effectuer ce stage à l'Institut Élie Cartan de Lorraine du 3 au 28 mai 2021. Je suis honoré d'avoir obtenu cette bourse.

Merci à **Madame Solange Deloustal**, vice-présidente de l'AMOPA 35 en charge des concours et des bourses, pour avoir répondu à mes nombreuses questions. Merci pour votre engagement et votre passion.

Bien évidemment un grand merci à **Gérald Tenenbaum** pour le temps consacré à encadrer mon stage, pour les réponses à mes questions, pour les nombreux conseils et pour m'avoir fait découvrir de belles mathématiques.

Enfin, merci à **Eliot** pour la relecture attentive de ce mémoire !

Introduction

Soit π la fonction comptant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.
Le théorème des nombres premiers affirme que l'on peut estimer le nombre de nombres premiers :

$$\boxed{\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}}$$

Nous allons étudier deux preuves. Une due à Zagier particulièrement courte faisant intervenir la fonction zêta de Riemann ζ. L'autre due à Daboussi qui donne une preuve élémentaire (élémentaire pour signifier sans recours à l'analyse complexe) qui n'utilise pas l'identité de Selberg.

En 1896, Jacques Hadamard et Charles-Jean de la Vallée Poussin donnent indépendamment une démonstration complète du théorème des nombres premiers qui repose sur la théorie des fonctions holomorphes. Ce n'est qu'en 1980 que D.J. Newman découvre une simplification très utile du théorème analytique. Pour le centenaire de la preuve de 1896, Don Zagier a donné la preuve la plus courte du théorème des nombres premiers reprenant celle proposée par D.J. Newman.

Pour le $70^{\text{ème}}$ anniversaire de Hubert Delange et de Paul Erdős, Hédi Daboussi propose en 1983 une preuve du théorème des nombres premiers qui n'utilise ni l'analyse complexe ni l'identité de Selberg.

Table des matières

1 La démonstration de Zagier

1.1 Définitions

Souvent, on ne fera pas la différence entre la fonction et la fonction évaluée afin de préciser de quelle variable elle dépend.
On conviendra que p est un nombre premier, x un nombre réel et $s = \sigma + i\tau$ un nombre complexe.
On introduit trois fonctions, à savoir la fonction zêta, une série de Dirichlet liée aux nombres premiers et une fonction de Tchébychev :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Phi(s) := \sum_{p} \frac{\ln p}{p^s}, \quad \vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \ln p.$$

On va prouver une série de résultats qui permettront de démontrer le théorème des nombres premiers.
Montrons que les fonctions introduites sont bien définies.

Proposition 1.1. *Les séries ζ et Φ convergent uniformément localement lorsque $\sigma > 1$.*

Démonstration. Soit pour $\sigma_0 > 1, D_0 = \{s = \sigma + i\tau : \sigma \geqslant \sigma_0\}$. Alors pour $s \in D_0$ on a :

- $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ qui est le terme général d'une série convergente car $\sigma_0 > 1$.
- $\left|\frac{\ln p}{p^s}\right| \leqslant \frac{\ln p}{p^{\sigma_0}}$ qui est le terme général d'une série de Bertrand convergente.

Donc ζ et Φ sont des fonctions holomorphes sur $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ et la convergence des séries est localement uniforme. □

1.2 Produit eulérien

On va donner une autre expression de ζ dans ce paragraphe.

Proposition 1.2. *On a*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad (s \in \mathbb{C},\ \sigma > 1).$$

Démonstration. Remarquons que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{sk}} = \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Écrivons la décomposition en facteurs premiers de n.
Notons $P^+(n)$ le plus grand nombre premier intervenant dans la décomposition en facteurs premiers de n. On prendra par convention $P^+(1) = 1$. De plus, p_j désigne le j-ème nombre premier et k_j la valuation p_j-adique de n ($j \geqslant 1$).

$$n = \prod_{p_j \leqslant P^+(n)} p_j^{k_j}.$$

Puisque $\zeta(s)$ est absolument convergente, on a par associativité des familles sommables que :

$$S_q := \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ P^+(n) \leqslant p_q}} \frac{1}{n^s} = \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{k_q \in \mathbb{N}} \frac{1}{\left(p_1^{k_1} \ldots p_q^{k_q}\right)^s} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant q} \sum_{k=0}^{\infty} p_j^{-ks} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant q} \frac{1}{1 - p_j^{-s}}.$$

Or quand q tend vers l'infini p_q tend vers l'infini et

$$\left|\sum_{n} \frac{1}{n^s} - \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P^+(n)\leqslant p_q}} \frac{1}{n^s}\right| \leqslant \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P^+(n)> p_q}} \frac{1}{n^\sigma} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0 \ \text{(reste d'une série convergente).}$$

Alors on obtient

$$\zeta(s) = \lim_{q\to\infty} S_q = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

□

1.3 Premier prolongement holomorphe

Proposition 1.3. *La fonction $\zeta(s) - 1/(s-1)$ se prolonge holomorphiquement à $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$.*

Démonstration. Pour $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) \mathrm{d}x.$$

Le membre de droite converge absolument pour $\sigma > 0$, en effet :

$$\begin{aligned}
\left|\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_n^{n+1} \int_n^x \frac{-s}{u^{s+1}} \mathrm{d}u \ \mathrm{d}x\right| = |s| \left|\int_n^{n+1} \int_n^x \frac{1}{u^{s+1}} \mathrm{d}u \ \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant |s| \max_{n\leqslant x\leqslant n+1} \left|\int_n^x \frac{\mathrm{d}u}{u^{s+1}}\right| \leqslant |s| \max_{n\leqslant x\leqslant n+1} \int_n^x \frac{\mathrm{d}u}{|u^{s+1}|} \\
&\leqslant |s| \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}u}{|u^{s+1}|} = |s| \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}u}{u^{\sigma+1}} \leqslant \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}.
\end{aligned}$$

Le terme de droite est le terme général d'une série convergente car $\sigma > 0$.
Donc $\zeta(s) - 1/(s-1)$ coïncide sur $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ (possédant un point d'accumulation) avec une fonction holomorphe sur le domaine $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$. Par le théorème du prolongement analytique, $\zeta(s) - 1/(s-1)$ est égale à cette fonction, elle s'étend donc holomorphiquement à $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$. □

1.4 Majoration de ϑ

Proposition 1.4. *On a la relation de comparaison $\vartheta(x) = O(x)$ $(x \geqslant 1)$.*

Démonstration. Par la formule du binôme de Newton on a :

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \cdots + \binom{2n}{2n} \geqslant \binom{2n}{n}.$$

Or en isolant les nombres premiers,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)\times(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} = \prod_{n<p\leqslant 2n} p \times \underbrace{\frac{1}{n!} \prod_{\substack{n<k\leqslant 2n\\ k\notin\mathbb{P}}} k}_{\geqslant 1} \geqslant \prod_{n<p\leqslant 2n} p.$$

Et on a aussi

$$2^{2n} \geqslant \prod_{n<p\leqslant 2n} p = \exp\left(\sum_{n<p\leqslant 2n} \ln p\right) = \exp\left\{\vartheta(2n) - \vartheta(n)\right\}.$$

Comme la fonction ln est croissante :

$$2n\ln 2 \geqslant \vartheta(2n) - \vartheta(n).$$

Notons $x = 2n$, on a ainsi en itérant :

$$\begin{array}{rcl} x\ln 2 & \geqslant & \vartheta(x) - \vartheta(x/2) \\ \dfrac{x}{2}\ln 2 & \geqslant & \vartheta(x/2) - \vartheta(x/4) \\ \dots & & \dots \\ \dfrac{x}{2^q}\ln 2 & \geqslant & \vartheta(x/2^q) - \vartheta(x/2^{q+1}) \end{array}$$

Et en sommant on obtient l'inégalité : $x\ln 2 \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^k} \geqslant \sum_{k=0}^{q} \left(\vartheta(x/2^k) - \vartheta(x/2^{k+1})\right)$.

Remarquons que le membre de droite est une série télescopique et en prenant $q > \left\lfloor \dfrac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$:

$$Cx \geqslant \vartheta(x) \;\text{ avec } C = \ln 2 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2\ln 2.$$

□

1.5 Non annulation de ζ et prolongement holomorphe de Φ

Admettons provisoirement que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma \geqslant 1$, cela sera l'objet de la proposition 1.6.
Compte tenu du fait que ζ est méromorphe sur $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$ on en déduit la proposition suivante.

Proposition 1.5 (Prolongement holomorphe de Φ)**.** $\Phi(s) - 1/(s-1)$ *se prolonge holomorphiquement dans un voisinage ouvert* Ω *de* $\{s \in \mathbb{C}, \sigma \geqslant 1\}$.

Démonstration. Pour $\sigma > 1$ le produit eulérien de ζ donne

$$\log(\zeta(s)) = \sum_p -\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

en prenant la détermination principale du logarithme pour le membre de droite, cela définit une branche holomorphe du logarithme complexe de ζ.
En dérivant,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{p^{-s}\ \ln p}{1 - \dfrac{1}{p^s}} = -\sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1}.$$

Or

$$\frac{\ln p}{p^s - 1} - \frac{\ln p}{p^s} = \frac{p^s \ln p - (p^s - 1)\ln p}{p^s(p^s-1)} = \frac{\ln p}{p^s(p^s-1)}.$$

Donc
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \Phi(s) + \sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s-1)}. \tag{1}$$
Or la série $\displaystyle\sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s-1)}$ converge si $\Re(2s) > 1$ i.e. si $\sigma > 1/2$.

1. La fonction $\zeta'(s)/\zeta(s) + 1/(s-1)$ est holomorphe sur une boule centrée en 1 et de rayon ε notée $\mathcal{B}(1,\varepsilon)$. En effet, ζ est méromorphe sur $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$ avec un pôle en 1 d'après la proposition 1.3 et lorsque s tend vers 1, nous avons
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \underset{1}{\sim} \frac{-1}{(s-1)^2} \times \frac{s-1}{1} = \frac{-1}{s-1}.$$
2. $\zeta'(s)/\zeta(s)$ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$.
3. Comme ζ est méromorphe sur $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\}$ et que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma = 1$ $(s \neq 1)$, $\zeta'(s)/\zeta(s)$ est holomorphe au voisinage de chaque point $s = 1 + i\tau$ avec $\tau \in \mathbb{R}^*$. Pour chaque t non nul elle est holomorphe sur des boules centrées en $1 + i\tau$ de rayon $\delta(\tau)$ notées $\mathcal{B}(1 + i\tau, \delta(\tau))$.

Notons
$$\Omega := \mathcal{B}(1,\varepsilon) \cup \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\} \cup \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}^*} \mathcal{B}(1 + i\tau, \delta(\tau)).$$
Ω est bien un ouvert (union d'ouverts) connexe qui contient $\{s \in \mathbb{C} : \sigma \geqslant 1\}$.
Ainsi
$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1} = \underbrace{-\sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s-1)}}_{\text{holomorphe sur } \sigma > 1/2} - \underbrace{\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right)}_{\text{holomorphe sur } \Omega}.$$

Étant donné que les deux membres de l'égalité coïncident sur $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ (possédant un point d'accumulation) et que le membre de droite est holomorphe sur le domaine Ω, on peut appliquer le théorème du prolongement analytique. Ainsi, $\Phi(s) - 1/(s-1)$ s'étend holomorphiquement à $\{s \in \mathbb{C} : \sigma \geqslant 1\}$. $\square$

Proposition 1.6 (Non annulation de ζ)**.** *Nous avons* $\zeta(s) \neq 0 \quad (s \in \mathbb{C} : \ \sigma \geqslant 1)$.

Démonstration. On voit avec la formule du produit eulérien (6) que $\zeta(s) \neq 0$ lorsque $\sigma > 1$.
Étudions alors le cas $\sigma = 1$. Supposons que ζ a un zéro d'ordre $\mu \geqslant 0$ en $s = 1 + i\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et un zéro d'ordre ν en $s = 1 + 2i\alpha$ (μ et ν éventuellement nuls).
Précisons que si $\zeta(s) = 0$ alors $\zeta(\bar{s}) = 0$ par continuité de l'application conjugaison.
Calculons des limites. L'expression (1) donne :
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} -\varepsilon \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} \tag{2}$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm i\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0+} -\varepsilon \frac{\zeta'(1+\varepsilon \pm i\alpha)}{\zeta(1+\varepsilon \pm i\alpha)} \tag{3}$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm 2i\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0+} -\varepsilon \frac{\zeta'(1+\varepsilon \pm 2i\alpha)}{\zeta(1+\varepsilon \pm 2i\alpha)} \tag{4}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

<u>1^{RE} LIMITE :</u> $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = 1$.

Par ce qui précède on a :

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \underset{1}{\sim} \frac{-1}{s-1}.$$

Ainsi,

$$\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} \underset{0}{\sim} \frac{-1}{1+\varepsilon-1} = \frac{-1}{\varepsilon}.$$

Alors

$$-\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 1.$$

<u>$2^{\text{ÈME}}$ LIMITE :</u> $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon\pm i\alpha) = -\mu$.

Comme $1\pm i\alpha$ annule ζ avec multiplicité μ alors $\zeta(1+\varepsilon\pm i\alpha) \underset{0}{\sim} C\varepsilon^{\mu}$ $(C\in\mathbb{C})$.

Puisque ζ est analytique en $1\pm i\alpha$ on a $\zeta'(1+\varepsilon\pm i\alpha) \underset{0}{\sim} C\mu\varepsilon^{\mu-1}$.

Ainsi,

$$-\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon\pm i\alpha)}{\zeta(1+\varepsilon\pm i\alpha)} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\sim} -\varepsilon\times\frac{\mu}{\varepsilon} = -\mu.$$

<u>$3^{\text{ÈME}}$ LIMITE :</u> $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon\pm 2i\alpha) = -\nu$.

On procède exactement de la même façon que pour le calcul ci-dessus.

Calculons

$$S := \sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\Phi(1+\varepsilon+ir\alpha).$$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\Phi(1+\varepsilon+ir\alpha) \overset{\text{def}}{=} \sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\sum_{p}\frac{\ln p}{p^{1+\varepsilon+ir\alpha}} = \sum_{p}\frac{\ln p}{p^{1+\varepsilon}}\sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\frac{1}{(p^{i\alpha})^r} \\ &= \sum_{p}\frac{\ln p}{p^{1+\varepsilon}}\, p^{2i\alpha}\sum_{r=0}^{4}\binom{4}{r}\frac{1}{(p^{i\alpha})^r} \overset{\text{Binôme}}{=} \sum_{p}\frac{\ln p}{p^{1+\varepsilon}}\, p^{2i\alpha}(1+p^{-i\alpha})^4 = \sum_{p}\frac{\ln p}{p^{1+\varepsilon}}(p^{i\alpha/2}+p^{-i\alpha/2})^4 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Calculons $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon S$.

En développant S avec la formule initiale on a :

$$S = \Phi(1+\varepsilon-2i\alpha)+4\Phi(1+\varepsilon-i\alpha)+6\Phi(1+\varepsilon)+4\Phi(1+\varepsilon+i\alpha)+\Phi(1+\varepsilon+2i\alpha).$$

Alors en multipliant par ε et en faisant $[\varepsilon\to 0^+]$, on obtient par les calculs de limites précédents :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon S = -\nu-4\mu+6-4\mu-\nu = -2\nu-8\mu+6.$$

Or comme $S\geqslant 0$, $\quad -2\nu-8\mu+6\geqslant 0$.

Ce qui implique $\mu = 0$. Donc ζ ne s'annule pas sur $\{s\in\mathbb{C},\sigma\geqslant 1\}$. $\square$

1.6 Une nouvelle expression de Φ

Lemme 1.7. *On a l'expression* $\Phi(s) = s \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\vartheta(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^{st}}\ \mathrm{d}t$.

Démonstration. Pour $\sigma > 1$ on a par convergence uniforme :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} s\ \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\ \mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty} s\ \sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{x^{s+1}}\ \mathrm{d}x = \sum_p \int_1^{+\infty} s\ \mathbb{1}_{x\geqslant p} \frac{\ln p}{x^{s+1}}\ \mathrm{d}x = \sum_p \int_p^{+\infty} s\ \frac{\ln p}{x^{s+1}}\ \mathrm{d}x \\ &= \sum_p \ln p\ \left[s \times \frac{-1}{s\ x^s}\right]_p^{+\infty} = \sum_p \frac{\ln p}{p^s} = \Phi(s).\end{aligned}$$

En effectuant ensuite le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ on obtient :

$$\Phi(s) = \int_1^{+\infty} s\ \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\ \mathrm{d}t = s \int_0^{+\infty} \frac{\vartheta(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^{st}}\ \mathrm{d}t.$$

□

1.7 Le théorème analytique

Théorème 1.8. *Si f est bornée, localement intégrable et si* $g(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-zt}\ \mathrm{d}t$ *définie pour* $\sigma > 0$, *s'étend holomorphiquement à* $\{z \in \mathbb{C} : \sigma \geqslant 0\}$ *alors* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge et vaut* $g(0)$.

Démonstration. Soit $T > 0$. La fonction $g_T(z) = \int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-zt}\ \mathrm{d}t$ est clairement entière.
Montrons que $\lim\limits_{T\to+\infty} g_T(0)$ existe et vaut $g(0)$.

Soient $R > 0$ et $\Omega_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \sigma > -\delta_R\}$ avec δ_R assez petit pour que g soit holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega_R}$. Sa frontière se décompose en $\partial\Omega_R = D_R^- \cup E_R \cup C_R^+$ avec

$$D_R^- := \{|z| \leqslant R, \sigma = -\delta_R\}, \quad E_R := \{|z| = R, -\delta_R \leqslant \sigma \leqslant 0\}, \quad C_R^+ := \{|z| = R, \sigma \geqslant 0\}.$$

La formule de Cauchy fournit :

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_R} \frac{g(z) - g_T(z)}{z} \mathrm{e}^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\ \mathrm{d}z.$$

Décomposons l'intégrale sur $\partial\Omega_R$ en intégrales sur D_R^-, E_R et C_R^+. Montrons qu'elles tendent vers 0 quand R tend vers l'infini afin de montrer que le terme de gauche tend vers 0.

<u>1re majoration :</u> Montrons que

$$\left|\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^+} \frac{g(z) - g_T(z)}{z} \mathrm{e}^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\ \mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{R}. \tag{5}$$

Soit $z \in C_R^+$ avec $\sigma > 0$.

$$|g(z) - g_T(z)| = \left|\int_T^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-zt}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty \left|\int_T^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty \int_T^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sigma t}\ \mathrm{d}t = \|f\|_\infty \frac{\mathrm{e}^{-\sigma T}}{\sigma}. \tag{6}$$

On note $z = R\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{zT}}{z}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\right| = \frac{\mathrm{e}^{\sigma T}}{R}\left|\mathrm{e}^{-i\theta}+e^{i\theta}\right| = \frac{\mathrm{e}^{\sigma T}}{R}\left|2\Re\left(\frac{z}{R}\right)\right| = \frac{2\mathrm{e}^{\sigma T}|\sigma|}{R^2}. \tag{7}$$

En multipliant (6) et (7), on obtient :

$$\left|\frac{g(z)-g_T(z)}{z}\mathrm{e}^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\right| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{R^2}.$$

Par une majoration standard,

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R^+}\frac{g(z)-g_T(z)}{z}\mathrm{e}^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}L(C_R^+)\times\frac{2\|f\|_\infty}{R^2} = \frac{\|f\|_\infty}{R}.$$

On a étudié l'intégrande sur C_R^+, il reste encore à l'étudier sur $D_R^- \cup E_R$.
On traite désormais $g(z)$ et $g_T(z)$ séparément.

<u>2ÈME MAJORATION :</u> Montrons que

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{D_R^-\cup E_R}\frac{-g_T(z)}{z}\mathrm{e}^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{R}. \tag{8}$$

Puisque $g_T(z)$ est entière, son intégrale sur $D_R^- \cup E_R$ est égale à celle sur $C_R^- := \{|z| = R, \sigma \leqslant 0\}$.
Pour $\sigma < 0$, on a :

$$|g_T(z)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^T \mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{-\sigma}\left(\mathrm{e}^{-\sigma T}-1\right) \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{|\sigma|}\mathrm{e}^{-\sigma T}. \tag{9}$$

Alors avec (7) et (9) on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R^-}\frac{-g_T(z)}{z}\mathrm{e}^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\,\mathrm{d}z\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{C_R^-}\frac{\|f\|_\infty}{|\sigma|}\mathrm{e}^{-\sigma T}\times\frac{2\mathrm{e}^{\sigma T}|\sigma|}{R^2}\,\mathrm{d}z \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi R^2}L(C_R^-) = \frac{\|f\|_\infty}{\pi R^2}\pi R = \frac{\|f\|_\infty}{R}.\end{aligned}$$

<u>3ÈME MAJORATION :</u> Montrons que

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{D_R^-\cup E_R} g(z)\frac{\mathrm{e}^{zT}}{z}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{10}$$

C'est l'intégrale du produit d'une fonction indépendante de T, holomorphe au voisinage de $D_R^- \cup E_R$ avec e^{zT} qui satisfait pour $\sigma < 0$: $|\mathrm{e}^{zT}| \leqslant \mathrm{e}^{\sigma T} \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0$.
On obtient le résultat par le théorème de la convergence dominée.

<u>CONCLUSION :</u>
Finalement, les trois majorations (5), (8), (10) nous donnent

$$\overline{\lim_{T\to+\infty}}\,|g(0)-g_T(0)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{R} + \frac{\|f\|_\infty}{R} + 0 = \frac{2\|f\|_\infty}{R}.$$

Et en faisant $[R \to +\infty]$, on obtient $\overline{\lim}_{T\to+\infty}|g(0)-g_T(0)| = 0$, ce qui démontre le théorème. □

1.8 Convergence d'une intégrale

Proposition 1.9. *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}\ \mathrm{d}x$ *converge.*

Démonstration. Utilisons le théorème analytique (1.8) avec $f(t)=\vartheta(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}-1$.
La fonction f est bornée d'après la proposition 1.4 puisque $f(t)=O(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}-1=O(1)$ et est localement intégrable car ϑ est constante par morceaux.
Pour $\sigma>0$,

$$g(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}(\vartheta(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}-1)\mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\vartheta(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-(s+1)t}\ \mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\ \mathrm{d}t.$$

D'après le lemme 1.7 on a pour $\sigma>1$, $\quad \Phi(s)=s\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\vartheta(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^{st}}\ \mathrm{d}t.$
Alors

$$g(s)=\frac{\Phi(s+1)}{s+1}-\left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty}=\frac{\Phi(s+1)}{s+1}-\frac{1}{s}=\frac{\Phi(s+1)-1/s}{s+1}+\frac{1/s}{s+1}-\frac{1}{s}.$$

Or d'après la proposition 1.5, $\Phi(s)-1/(s-1)$ s'étend holomorphiquement à un ouvert connexe Ω de $\{s\in\mathbb{C}:\sigma\geqslant 1\}$. Donc $\Phi(s+1)-1/s$ s'étend holomorphiquement à un ouvert connexe ω de $\{s\in\mathbb{C}:\sigma\geqslant 0\}$. On note cette extension holomorphe h. On a ainsi l'expression suivante :

$$g(s)=\frac{h(s)}{s+1}-\frac{1}{s+1}=\frac{h(s)-1}{s+1}.$$

C'est un quotient de fonctions holomorphes sur ω dont le dénominateur ne s'annule pas.
Ainsi, g coïncide sur $\{s\in\mathbb{C}:\sigma>0\}$ (possédant un point d'accumulation) avec une fonction holomorphe sur le domaine ω. Par le théorème de prolongement analytique, g s'étend de façon holomorphe sur ω donc sur $\{s\in\mathbb{C}:\sigma\geqslant 0\}$ car $\{s\in\mathbb{C}:\sigma\geqslant 0\}\subset\omega$.
Par le théorème analytique $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
Effectuons le changement de variable $u=\mathrm{e}^t$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$.

$$\int_0^{+\infty}\left(\vartheta(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}-1\right)\ \mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\left(\frac{\vartheta(u)}{u}-1\right)\times\frac{1}{u}\ \mathrm{d}u=\int_1^{+\infty}\frac{\vartheta(u)-u}{u^2}\ \mathrm{d}u.$$

Et comme l'intégrale de gauche converge, celle de droite converge. □

1.9 Un équivalent de ϑ

Proposition 1.10. *On a l'équivalent* $\vartheta(x)\underset{+\infty}{\sim}x$.

Démonstration. D'après la proposition 1.9 on a pour $\varepsilon>0$:

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\ \mathrm{d}t:=\eta(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

D'une part,

$$\eta(x)=\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\ \mathrm{d}t=\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\vartheta(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t-\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\geqslant\varepsilon x\frac{\vartheta(x)}{(1+\varepsilon)^2x^2}-\ln(1+\varepsilon).$$

Ce qui donne :

$$\vartheta(x) \leqslant \frac{x(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\eta(x) + \frac{x(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon) = o_\varepsilon(x) + \frac{x(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon).$$

Alors

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant o_\varepsilon(1) + \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon).$$

Donc

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon).$$

Et comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant 1. \tag{11}$$

D'autre part pour $\varepsilon > 0$:

$$\gamma(x) := \int_{(1-\varepsilon)x}^{x} \frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon x \frac{\vartheta(x)}{(1-\varepsilon)^2 x^2} + \ln(1-\varepsilon) \quad \text{où } \gamma(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Ce qui donne :

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon}x\,\gamma(x) - (1-\varepsilon)^2\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon}x = o_\varepsilon(x) - (1-\varepsilon)^2\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon}x \leqslant \vartheta(x).$$

Ainsi

$$o_\varepsilon(1) - (1-\varepsilon)^2\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \leqslant \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Alors

$$-(1-\varepsilon)^2\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \leqslant \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Et comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$1 \leqslant \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}. \tag{12}$$

Les inégalités (11) et (12) fournissent

$$1 \leqslant \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant 1.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

Ce qui permet de conclure que $\vartheta(x) \underset{+\infty}{\sim} x$. $\square$

1.10 Preuve du théorème des nombres premiers

Théorème 1.11. *On a l'équivalent*

$$\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

Démonstration. Soient $x \geqslant 1$ et $\varepsilon > 0$.
On a

$$\vartheta(x) \geqslant \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leqslant x} \ln p \geqslant \sum_{x^{1-\varepsilon}<p\leqslant x} \ln\left(x^{1-\varepsilon}\right) = (1-\varepsilon)\ln x\left(\pi(x) - \pi\left(x^{1-\varepsilon}\right)\right).$$

Et on a la majoration

$$\pi\left(x^{1-\varepsilon}\right) \leqslant x^{1-\varepsilon} \quad \text{car} \quad \pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1 \leqslant x.$$

Et $x^{1-\varepsilon} = o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$ car $\ln(x)/x^{\varepsilon}$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.
Ainsi,

$$\frac{\vartheta(x)}{\ln x} \geqslant (1-\varepsilon)\pi(x) + o\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Et d'après la proposition 1.10, $\vartheta(x) \underset{+\infty}{\sim} x$. Ce qui fournit que $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$.

De plus,

$$\pi(x)\ln x - \vartheta(x) = \sum_{p\leqslant x} \ln x - \sum_{p\leqslant x} \ln p = \sum_{p\leqslant x} \ln\left(\frac{x}{p}\right) = \sum_{p\leqslant x}\int_p^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_2^x \sum_{p\leqslant t}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi puisque l'intégrale $\int_2^x (\ln t)^{-1}\,\mathrm{d}t$ diverge, on obtient par sommation des relations de comparaison :

$$\pi(x)\ln x - \vartheta(x) = O\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right).$$

Et par une intégration par parties on obtient :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = O\left(\frac{x}{\ln x}\right) + o\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right).$$

Alors

$$\pi(x)\ln x - \vartheta(x) = O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Ce qui fournit

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right).$$

Et comme $\vartheta(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ on a l'équivalent

$$\boxed{\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.}$$

□

2 La démonstration de Daboussi

2.1 Définitions

On conviendra que p désigne un nombre premier.

Définition 2.1 (Fonction complètement multiplicative)**.** *Une fonction* ***arithmétique*** *est une fonction* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. *Elle est dite* ***complètement multiplicative*** *si pour toute paire d'entiers* (m, n) :

$$f(1) \neq 0 \quad et \quad f(mn) = f(m)f(n). \tag{13}$$

Elle est ***multiplicative*** *si elle vérifie* (13) *pour toute paire d'entiers* (m, n) ***premiers entre eux****.*

Notons que puisque le pgcd de 1 et 1 est 1, on a $f(1) = f(1)^2$ et comme $f(1) \neq 0$ alors $f(1) = 1$.

On introduit la fonction de Von Mangoldt Λ et la fonction de Möbius μ définies par :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^k \ (k \geqslant 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon (si } n \text{ est divisible par un carré)} \end{cases}$$

Pour $y \geqslant 2$, on définit deux fonctions complètement multiplicatives u_y et v_y définies par :

$$u_y(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p > y \\ 0 & \text{si } p \leqslant y \end{cases} \quad , \quad v_y(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > y \\ 1 & \text{si } p \leqslant y \end{cases} \quad .$$

On notera aussi $V_y(t) = \sum_{n \leqslant t} v_y(n)\mu(n)$, $\ V_y^*(t) = \sum_{n \leqslant t} v_y(n)$ et $M(t) = \sum_{n \leqslant t} \mu(n)$.

Le signe $*$ désignera la convolution de Dirichlet, c'est à dire que pour deux fonctions arithmétiques f et g on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\substack{d_1, d_2 \\ d_1 d_2 = n}} f(d_1) g(d_2).$$

Notons que la loi $*$ est associative et commutative, d'élément neutre δ où $\delta(n) = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon.

Proposition 2.2. *Soient* f, g *deux fonctions multiplicatives dont les séries de Dirichlet respectives convergent absolument en* s. *Alors la série* $\sum_{n \geqslant 1} \{f * g(n)\}/n^s$ *converge absolument et on l'égalité :*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n \geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{f * g(n)}{n^s}. \tag{14}$$

Démonstration. En effet par convergence absolue,

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n \geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{j \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} \frac{f(j)}{j^s} \frac{g(k)}{k^s} = \sum_{n \geqslant 1} \sum_{\substack{j,k \\ jk = n}} \frac{f(j) g(k)}{(jk)^s} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{f * g(n)}{n^s}.$$

□

2.2 Une autre expression d'une série de Dirichlet

Lemme 2.3. *Si* $w_n \geqslant 0$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ *converge alors* $\prod_{n\geqslant 1}(1+w_n)$ *converge.*

Démonstration. On a

$$\ln\left(\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(1+w_k)\right) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\ln(1+w_k) \quad (n\geqslant 1). \tag{15}$$

Or la série de terme général w_n converge donc w_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Par conséquent $\sum_{n\geqslant 1}\ln(1+w_n)$ converge si et seulement si $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.
En utilisant la relation (15) on obtient le résultat par composition avec la fonction exponentielle. □

Théorème 2.4. *Soit* f *une fonction arithmétique multiplicative et* $s\in\mathbb{C}$.
La série de Dirichlet $F(s)=\sum_{n\geqslant 1} f(n)/n^s$ *converge absolument si et seulement si la série* $\sum_p\sum_{\nu\geqslant 1} f(p^\nu)/p^{\nu s}$ *converge absolument. On a alors le produit eulérien :*

$$F(s) = \prod_p \sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}.$$

Démonstration. Si la série de Dirichlet $F(s)$ converge absolument alors la série de droite converge absolument car l'ensemble $\{p^\nu : p\in P, \nu\geqslant 1\}$ est inclus dans $\mathbb{N}^*$.

Réciproquement, si la somme double converge absolument alors $\prod_p\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}|f(p^\nu)/p^{\nu s}|\right)$ converge d'après le lemme 2.3.

En utilisant à nouveau un nombre fini de fois la formule (14) on obtient l'égalité :

$$\prod_{p\leqslant x}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}} = \sum_{\nu_0\geqslant 0}\frac{f(p_0^{\nu_0})}{p_0^{\nu_0 s}}\sum_{\nu_1\geqslant 0}\frac{f(p_1^{\nu_1})}{p_1^{\nu_1 s}}\cdots\sum_{\substack{\nu_q\geqslant 0\\ p_q=P^+(n)\leqslant x}}\frac{f(p_q^{\nu_q})}{p_q^{\nu_q s}} = \sum_{\substack{n=p_0^{\nu_0}p_1^{\nu_1}\ldots p_q^{\nu_q}\\ \nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_q\geqslant 0\\ P^+(n)\leqslant x}}\frac{f(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ P^+(n)\leqslant x}}\frac{f(n)}{n^s}.$$

Et on a aussi :

$$\sum_{n\leqslant x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \leqslant \sum_{P^+(n)\leqslant x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \prod_{p\leqslant x}\sum_{\nu\geqslant 0}\left|\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right| = \prod_{p\leqslant x}\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\left|\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right|\right) \leqslant \prod_p\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\left|\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right|\right).$$

Cela prouve la convergence absolue de $F(s)$ puisque le membre de droite est convergent.

De plus, on dispose de la majoration suivante :

$$\left|\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^s} - \prod_{p\leqslant x}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right| = \left|\sum_{P^+(n)>x}\frac{f(n)}{n^s}\right| \leqslant \sum_{x\leqslant n}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|.$$

Or le membre de droite est le reste d'une série convergente donc tend vers 0 quand x tend vers l'infini.
On obtient donc la formule annoncée. □

Remarque 2.5. *On retrouve le produit eulérien de* ζ *établi à la proposition 1.2 en spécialisant* $f=\mathbf{1}$.

2.3 Une première inégalité

Nous allons calculer la somme de deux séries et utiliser le principe de l'hyperbole afin de majorer $\overline{\lim_{x\to+\infty}} |M(x)/x|$.

Lemme 2.6. *La série* $\sum v_y(n)/n$ *converge absolument et a pour somme* $\prod_{p\leqslant y}(1-1/p)^{-1}$.

Démonstration. Utilisons le théorème 2.4.

$$\sum_p \sum_{\nu\geqslant 1} \frac{v_y(p^\nu)}{p^\nu} = \sum_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{1}{p^\nu} = \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p-1}.$$

Le membre de droite étant fini, on obtient la convergence. On en déduit

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{v_y(n)}{n} = \prod_p \sum_{\nu\geqslant 0}\frac{v_y(p^\nu)}{p^\nu} = \prod_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{1}{p^\nu} = \prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

□

Lemme 2.7. *La série* $\sum \mu(n)v_y(n)/n$ *converge absolument et a pour somme* $\prod_{p\leqslant y}(1-1/p)$.

Démonstration. Comme précédemment, utilisons le théorème 2.4.
Remarquons tout d'abord que μv_y est multiplicative.
Ensuite,

$$\sum_p\sum_{\nu\geqslant 1}|\mu(p^\nu)|\frac{v_y(p^\nu)}{p^\nu} = \sum_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{|\mu(p^\nu)|}{p^\nu} = \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}.$$

Le membre de droite étant une somme finie, on obtient la convergence absolue. On en déduit

$$\sum_{n\geqslant 1}\mu(n)\frac{v_y(n)}{n} = \prod_p\sum_{\nu\geqslant 0}\mu(p^\nu)\frac{v_y(p^\nu)}{p^\nu} = \prod_{p\leqslant y}\left(\mu(1)+\frac{\mu(p)}{p}+0+\dots\right) = \prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

□

Théorème 2.8 (Principe de l'hyperbole)**.** *Soient f et g deux fonctions multiplicatives. On pose*

$$F(x) := \sum_{n\leqslant x} f(n), \quad G(x) := \sum_{n\leqslant x} g(n).$$

Alors pour $1\leqslant y\leqslant x$:

$$\sum_{n\leqslant x} f*g(n) = \sum_{n\leqslant y} g(n)F\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{m\leqslant x/y} f(m)G\left(\frac{x}{m}\right) - F\left(\frac{x}{y}\right)G(y).$$

Démonstration. En notant $n=md$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} f*g(n) &= \sum_{md\leqslant x} f(m)g(d) = \sum_{\substack{md\leqslant x\\ d\leqslant y}} f(m)g(d) + \sum_{\substack{md\leqslant x\\ d>y}} f(m)g(d)\\
&= \sum_{d\leqslant y} g(d)F\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m\leqslant x/y} f(m)\left(G\left(\frac{x}{m}\right)-G(y)\right)\\
&= \sum_{d\leqslant y} g(d)F\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m\leqslant x/y} f(m)G\left(\frac{x}{m}\right) - F\left(\frac{x}{y}\right)G(y).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.9. *Pour tout $y \geqslant 2$,*

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \left|\frac{M(x)}{x}\right| \leqslant \left\{\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\} \int_1^{+\infty} \frac{|V_y(t)|}{t^2}\ \mathrm{d}t. \tag{16}$$

Démonstration. <u>1^{re} étape :</u> Montrons que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} u_y(n) = \prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{17}$$

Remarquons que pour $\nu \in \mathbb{N}$:

$$(v_y\mu * \mathbf{1})(p^\nu) = \sum_{d|p^\nu} v_y(d)\mu(d) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \nu} v_y(p^k)\mu(p^k) = 1 - v_y(p) = u_y(p) = u_y(p)^\nu = u_y(p^\nu).$$

Et comme une fonction multiplicative est uniquement déterminée par ses valeurs prises sur l'ensemble des puissances des nombres premiers (en raison de la multiplicativité et de la décomposition en facteurs premiers) on a l'égalité $u_y = (v_y\mu) * \mathbf{1}$.

En notant $f(m) = v_y(m)\mu(m)$ et $G(x) = \lfloor x \rfloor$ on obtient l'expression :

$$\sum_{n\leqslant x} u_y(n) = \sum_{n\leqslant x}(v_y\mu) * \mathbf{1}(n) = g(1)F(x) + \sum_{m\leqslant x} f(m)G\left(\frac{x}{m}\right) - F(x)G(1) = \sum_{m\leqslant x} v_y(m)\mu(m)\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor.$$

Par l'inégalité triangulaire on a la majoration

$$\left|\sum_{m\leqslant x} v_y(m)\mu(m)\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor - \frac{x}{m}\right)\right| \leqslant \sum_{m\leqslant x} v_y(m)|\mu(m)|\left|\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor - \frac{x}{m}\right| \leqslant \sum_{m\leqslant x} v_y(m)|\mu(m)|.$$

Or la série $\sum_m f(m)$ converge absolument car $f(m)$ n'est non nul que pour un nombre fini d'entiers m.

On a alors

$$\left|\sum_{m\leqslant x} v_y(m)\mu(m)\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor - \frac{x}{m}\right)\right| \leqslant \sum_{m\geqslant 1} v_y(m)|\mu(m)|.$$

Et donc

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{m\leqslant x} v_y(m)\mu(m)\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor - \frac{x}{m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{x}\sum_{m\geqslant 1} v_y(m)|\mu(m)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

On a ainsi

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} u_y(n) = \sum_{m\leqslant x} \mu(m)\frac{v_y(m)}{m} + \frac{1}{x}\sum_{m\leqslant x} v_y(m)\mu(m)\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor - \frac{x}{m}\right).$$

Et donc par le lemme 2.7

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} u_y(n) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(n)\frac{v_y(n)}{n} + 0 = \prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

<u>2^{nde} étape :</u> Montrons que

$$M(x) = \sum_{m\leqslant x} \mu(m)u_y(m)V_y\left(\frac{x}{m}\right).$$

Tout d'abord si f et g sont deux fonctions multiplicatives alors $f * g$ est multiplicative.
En particulier c'est vrai pour $f = \mu u_y$ et $g = \mu v_y$. Et on a pour $\nu \in \mathbb{N}$:

$$(u_y * v_y)(p^\nu) \quad = \quad \sum_{0 \leqslant k \leqslant \nu} u_y(p^k) v_y(p^{\nu-k}) = u_y(1)v_y(p^\nu) + u_y(p^\nu)v_y(1) = 1.$$

Ainsi en multipliant par μ on obtient pour tout entier n, $\mu(n) = (\mu u_y * \mu v_y)(n)$.

Alors on obtient une nouvelle expression de M en notant $f(m) = \mu(m)u_y(m)$ et $G(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)v_y(n)$:

$$\begin{aligned} M(x) &= \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = \sum_{n \leqslant x} (\mu u_y * \mu v_y)(n) = g(1)F(x) + \sum_{m \leqslant x} f(m) G\left(\frac{x}{m}\right) - F(x)G(1) \\ &= \sum_{m \leqslant x} f(m) G\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{m \leqslant x} \mu(m) u_y(m) V_y\left(\frac{x}{m}\right). \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u>

Notons $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_q$ la suite finie des entiers sans facteur carré ayant tous leurs diviseurs premiers plus petits que y. Ainsi, si n vérifie $x/d_{j+1} < n \leqslant x/d_j$ alors $d_j \leqslant x/n < d_{j+1}$ et $V_y(x/n) = V_y(d_j)$. On obtient alors :

$$M(x) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q-1} V_y(d_j) \sum_{x/d_{j+1} < n \leqslant x/d_j} u_y(n)\mu(n) + V_y(d_q) \sum_{n \leqslant x/d_q} u_y(n)\mu(n).$$

Et, par l'inégalité triangulaire et (17)

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| \frac{M(x)}{x} \right| &\leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q-1} |V_y(d_j)| \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{x/d_{j+1} < n \leqslant x/d_j} u_y(n) + \frac{|V_y(d_q)|}{d_q} \lim_{x \to +\infty} \frac{d_q}{x} \sum_{n \leqslant x/d_q} u_y(n) \\ &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant q-1} |V_y(d_j)| \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}} \right) \prod_{p \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{|V_y(d_q)|}{d_q} \prod_{p \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \left\{ \sum_{1 \leqslant j \leqslant q-1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2} \,\mathrm{d}t + \frac{|V_y(d_q)|}{d_q} \right\} \prod_{p \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \left\{ \int_1^{d_q} \frac{|V_y(t)|}{t^2} \,\mathrm{d}t + \frac{|V_y(d_q)|}{d_q} \right\} \prod_{p \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Or par construction de $d_1, \ldots, d_q$, si $n > d_q$ alors soit n a un facteur carré soit il a un diviseur plus grand que y. Ainsi si $n > d_q,\ v_y(n)\mu(n) = 0$. Par conséquent, si $t > d_q,\ V_y(t) = V_y(d_q)$.
On a alors :

$$\int_{d_q}^{+\infty} \frac{|V_y(t)|}{t^2} \,\mathrm{d}t = |V_y(d_q)| \int_{d_q}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{|V_y(d_q)|}{d_q}. \tag{19}$$

Les expressions (18) et (19) impliquent

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| \frac{M(x)}{x} \right| \leqslant \left\{ \prod_{p \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\} \int_1^{+\infty} \frac{|V_y(t)|}{t^2} \,\mathrm{d}t.$$

$\square$

2.4 Inversion de Möbius

Remarquons que pour $\nu \in \mathbb{N}$, $(\mu * \mathbf{1})(p^\nu) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \nu} \mu(p^k) = \delta_{1,p^\nu}$. Donc $\mu * \mathbf{1} = \delta$ où $\delta(n) = \delta_{1,n}$ est l'élément neutre pour la convolution de Dirichlet.

Théorème 2.10 (Inversion de Möbius -1)**.** *Soient f et g deux fonctions arithmétiques. Soit $n \geqslant 1$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

(*ii*) $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$.

Démonstration. C'est l'équivalence entre $g = f * \mathbf{1}$ et sa convolée $g * \mu = f * (\mathbf{1} * \mu) = f * \delta = f$. □

Théorème 2.11 (Inversion de Möbius -2)**.** *Soient F et G deux fonctions définies sur $[1, +\infty[$ à valeurs complexes. Soit $x \geqslant 1$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) $F(x) = \sum_{n \leqslant x} G\left(\frac{x}{n}\right)$.

(*ii*) $G(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$.

Démonstration. Montrons la première implication. Pour $x \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \sum_{m \leqslant x/n} G\left(\frac{x}{nm}\right) = \sum_{k \leqslant x} G\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{mn=k} \mu(n) = \sum_{k \leqslant x} G\left(\frac{x}{k}\right) \delta(k) = G(x).$$

La réciproque se montre de la même manière. □

Corollaire 2.12. *On a alors en particulier pour $G(x) = 1$*

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1.$$

Proposition 2.13. *On a*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leqslant 1. \tag{20}$$

Démonstration. Soit $x \geqslant 4$. On a d'après le corollaire 2.12 :

$$x \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} - 1 = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et en remarquant que $\mu(4) = 0$:

$$\left| \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |\mu(n)| = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \neq 4}} |\mu(n)| \leqslant \frac{1}{x} + \frac{\lfloor x-1 \rfloor}{x} \leqslant 1.$$

Si $x = 3$:
$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
Si $x = 2$:
$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$
Si $x = 1$:
$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = 1.$$
Donc pour tout x on a
$$\left| \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leqslant 1.$$
Ce qui fournit le résultat. $\square$

2.5 Une seconde inégalité

Notons $\alpha := \overline{\lim}\, |M(x)|/x$. Par définiton de M, on a $\alpha \leqslant 1$. Montrons que $\alpha \neq 0$ est impossible. Supposons alors $\alpha \neq 0$.

Lemme 2.14. *On a la majoration*
$$\sup_{a,b \in \mathbb{R}_+} \left| \int_a^b \frac{M(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x \right| \leqslant 4.$$

Démonstration. On a
$$\int_a^b \frac{M(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{x^2} \, \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 1} \mu(n) \int_a^b \frac{\mathbb{1}_{n \leqslant x}}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$
Or
$$\int_a^b \frac{\mathbb{1}_{n \leqslant x}}{x^2} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int_n^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{b} & \text{si } a < n \leqslant b \\ 0 & \text{si } n > b \\ \displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} & \text{si } n \leqslant a \end{cases}.$$
Ce qui implique :
$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 1} \mu(n) \int_a^b \frac{\mathbb{1}_{n \leqslant x}}{x^2} \, \mathrm{d}x &= \sum_{a < n \leqslant b} \mu(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{b} \right) + \sum_{n \leqslant a} \mu(n) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ &= \sum_{a < n \leqslant b} \frac{\mu(n)}{n} - \frac{1}{b} \left(M(b) - M(a) \right) + M(a) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ &= \sum_{a < n \leqslant b} \frac{\mu(n)}{n} + \frac{M(a)}{a} - \frac{M(b)}{b}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left|\int_a^b \frac{M(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\sum_{n\leqslant b}\frac{\mu(n)}{n}\right| + \left|\sum_{n\leqslant a}\frac{\mu(n)}{n}\right| + \left|\frac{M(a)}{a}\right| + \left|\frac{M(b)}{b}\right|.$$

Or la propositon 2.13 et l'inégalité $|M(x)| \leqslant x$ fournissent :

$$\sup_{a,b\in\mathbb{R}_+}\left|\int_a^b \frac{M(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 4.$$

□

Proposition 2.15. *Il existe $\delta > 1$ tel que pour tout β vérifiant $\alpha < \beta < 2$, on ait :*

$$\int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\beta}{\delta}\ln y + O(1).$$

Étant donné que pour $1 \leqslant t \leqslant y$, $V_y(t) = M(t)$.

Démonstration. Soient $0 < \alpha < \beta < 2$ et x_β tels que pour $x \geqslant x_\beta$, $|M(x)| \leqslant \beta x$. Notons $x_0 := x_\beta$.
Pour tout $y \geqslant x_0$, on scinde l'intervalle $[x_0, y[$ en un nombre fini d'intervalles ayant des bornes entières $[x_j, x_{j+1}[$ pour $0 \leqslant j \leqslant J$ telles que M est de signe constant sur chaque intervalle et change de signe à chaque x_j.
Notons

$$T_j := \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{|M(x)|}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{M(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 4 \text{ par le lemme 2.14.}$$

De plus, $M(x)$ est à valeurs entières et varie par sauts de ±1, elle ne peut donc changer de signe sans s'annuler, ainsi pour $0 < j \leqslant J$, $M(x_j) = 0$.
Pour $x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}$, on a $|M(x)| = |M(x) - M(x_j)| \leqslant x - x_j$.
Effectuons le changement de variable $x = tx_j$ dans l'intégrale T_j :

$$T_j = \int_1^{x_{j+1}/x_j} \frac{|M(tx_j)|}{x_j t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{x_{j+1}/x_j} \frac{\min(\beta t x_j\ ;\ tx_j - x_j)}{x_j t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$T_j \leqslant \int_1^{x_{j+1}/x_j} \min\left(\frac{t-1}{t^2}; \frac{\beta}{t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Et comme $T_j \leqslant 4$ on a en notant $\lambda_j = \ln(x_{j+1}/x_j)$:

$$T_j \leqslant T_j^* := \min\left(4\ ;\ \int_1^{\exp\lambda_j} \min\left(\frac{t-1}{t^2}; \frac{\beta}{t}\right)\,\mathrm{d}t\right).$$

Montrons que $T_j^* \leqslant \beta\lambda_j/\delta$ pour un certain $\delta > 1$ indépendant de j.
Si $\beta\lambda_j \geqslant 8$ alors on a :

$$T_j^* \leqslant 4 \leqslant \frac{1}{2}\beta\lambda_j.$$

Alors $\delta = 2 > 1$ convient.

Sinon on a $\beta\lambda_j < 8$ et compte tenu de l'inégalité $\ln t \geqslant 1 - 1/t$ (obtenue en étudiant la fonction) on obtient, si $\lambda_j \leqslant \beta$:

$$T_j^* \leqslant \int_1^{\exp\lambda_j} \frac{\ln t}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[(\ln t)^2\right]_1^{\exp(\lambda_j)} = \frac{\lambda_j^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}\beta\lambda_j.$$

Ainsi $\delta = 2 > 1$ convient.
Et si $\lambda_j > \beta$ alors :

$$T_j^* \leqslant \int_1^{\exp\lambda_j} \frac{\min(\beta;\ln t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^{\exp\beta} \frac{\ln t}{t}\ \mathrm{d}t + \int_{\exp\beta}^{\exp\lambda_j} \frac{\beta}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\beta^2}{2} + \beta(\lambda_j - \beta) = \beta\lambda_j\left(1 - \frac{\beta}{2\lambda_j}\right)$$

Or $8 > \beta\lambda_j$ donc $1/\lambda_j > \beta/8$ et alors $\beta/(2\lambda_j) > \beta^2/16$ et puisque $\beta > 1$ on obtient l'inégalité $1 - \beta/(2\lambda_j) < 1 - \beta^2/16 < 15/16$. Ainsi $\delta = 16/15 > 1$ convient.
Avec le choix $\delta = 16/15 > 1$, on obtient dans tous les cas $T_j^* \leqslant \beta\lambda_j/\delta$.
Or puisque $t \leqslant y,\ V_y(t) = M(t)$ et alors

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2}\ \mathrm{d}t &= \sum_{0\leqslant j\leqslant J} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{|M(x)|}{x^2}\ \mathrm{d}x = \sum_{0\leqslant j\leqslant J-1} T_j \leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant J} T_j^* \leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant J} \beta\lambda_j/\delta \\ &\leqslant \beta/\delta \sum_{0\leqslant j\leqslant J} (\ln x_{j+1} - \ln x_j) = (\ln x_{J+1} - \ln x_0)\,\beta/\delta \\ &\leqslant \beta(\ln y)/\delta + O(1).\end{aligned}$$

□

2.6 Premier théorème de Mertens

Théorème 2.16 (Transformation d'Abel discrète)**.** *Si on pose* $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$*, alors on a la transformation d'Abel :*

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 - A_0 b_1 + A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}).$$

Démonstration. Il suffit de réécrire la somme à l'aide d'un changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= a_0 b_0 - A_0 b_1 + A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}).\end{aligned}$$

□

Théorème 2.17 (Transformation d'Abel continue)**.** *Soient* $0 < y < x, f : [y,x] \to \mathbb{C}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$*. Notons pour* $x \geqslant 0,\ A(x) = \sum_{n\leqslant x} a(n)$*. Alors on a :*

$$\sum_{y<n\leqslant x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soient $p = \lfloor y \rfloor$ et $q = \lfloor x \rfloor$. Remarquons que

$$\sum_{y<n\leqslant x} a(n)f(n) = \sum_{p+1\leqslant n\leqslant q} a(n)f(n).$$

Par définition on a $a(n) = A(n) - A(n-1)$. Effectuons alors une transformation d'Abel discrète (2.16).

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leqslant x} a(n)f(n) &= \sum_{p+1\leqslant n\leqslant q} A(n)f(n) - \sum_{p+1\leqslant n\leqslant q} A(n-1)f(n) \\
&= \sum_{p+1\leqslant n\leqslant q-1} A(n)(f(n)-f(n+1)) + A(q)f(q) - A(p)f(p+1).
\end{aligned}$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a l'expression :

$$f(n) - f(n+1) = -\int_n^{n+1} f'(t)\ \mathrm{d}t$$

et pour $t \in [n, n+1[$ on a $A(t) = A(n)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leqslant x} a(n)f(n) &= -\sum_{p+1\leqslant n\leqslant q-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t + A(q)f(q) - A(p)f(p+1) \\
&= -\int_{p+1}^{q} A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t + A(q)f(q) - A(p)f(p+1).
\end{aligned}$$

Or

$$\int_{p+1}^{q} A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{p+1}^{y} A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t + \int_{y}^{x} A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x}^{q} A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Et en utilisant à nouveau le fait que pour $t \in [n, n+1[$ on a $A(t) = A(n)$, on en déduit

$$\int_{p+1}^{q} A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{y}^{x} A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t + A(p)(f(y) - f(p+1)) + A(q)(f(q) - f(x)).$$

D'où

$$\sum_{y<n\leqslant x} a(n)f(n) = -\int_{y}^{x} A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t + A(q)f(x) - A(p)f(y).$$

Et comme $A(q) = A(x)$ et $A(p) = A(y)$ on obtient le résultat. □

Remarque 2.18. *En particulier pour $x > 1$ et $f : [1, x] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ on a :*

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Il suffit de poser $y = 1$ et de remarquer que $A(1) = a(1)$. □

Théorème 2.19 (Formule de Legendre)**.** *La valuation p-adique de $n!$ est donnée par :*

$$\nu_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Démonstration. Soient $n \geqslant 1$ et α_k le plus grand entier tel que $\alpha_k p^k \leqslant n$.
Alors le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à n et divisibles par p^k est $\alpha_k = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
Soit n_k le nombre d'entiers entre 1 et n de valuation p-adique exactement égale à k.
Il y a $n_k = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$ multiples de p^k et pas de p^{k+1}.
On a alors

$$\begin{aligned} \nu_p(n!) &= \sum_{k\geqslant 1} k n_k = \sum_{k\geqslant 1} k \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) = \sum_{k\geqslant 1} k \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k\geqslant 2} (k-1) \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{k\geqslant 2} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor . \end{aligned}$$

□

Théorème 2.20 (Premier théorème de Mertens)**.** *On a la formule asymptotique*

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

Démonstration. Notons pour $x > 1$, $N := \lfloor x \rfloor$ et calculons $\ln(N!)$ de deux manières différentes.
Tout d'abord utilisons la transformation d'Abel continue (2.17) avec $a(n) = 1$ $(n \geqslant 1)$, $f(t) = \ln t$.
Alors $A(t) = \lfloor t \rfloor$. On obtient :

$$\ln(N!) = \sum_{n\leqslant x} \ln n = \lfloor x \rfloor \ln x - \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Notons $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ la partie fractionnaire de t, alors :

$$\ln(N!) = (x - \{x\}) \ln x - \int_1^x \frac{t - \{t\}}{t} \, \mathrm{d}t = x \ln x - \{x\} \ln x - (x-1) + \int_1^x \frac{\{t\}}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Et comme $0 \leqslant \{t\} \leqslant 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{\{t\}}{t} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x.$$

Alors on obtient :

$$\ln(N!) = x \ln x - x + O\left(\ln x\right). \tag{21}$$

Ensuite, en écrivant

$$\ln(N!) = \ln \left(\prod_{p\leqslant x} p^{\nu_p(N!)} \right) = \sum_{p\leqslant x} \nu_p(N!) \ln p$$

et en utilisant la formume de Legendre (2.19)

$$\nu_p(N!) = \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor .$$

On obtient alors :

$$\ln(N!) = \sum_{p\leqslant x} \ln p \sum_{k\geqslant 1} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^k} \right\rfloor .$$

Et les inégalités

$$\frac{x}{p^k} - 1 < \left\lfloor \frac{x-1}{p^k} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^k} \right\rfloor \leqslant \frac{\lfloor x \rfloor}{p^k} \leqslant \frac{x}{p^k}$$

montrent que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln(N!) &= \sum_{p \leqslant x} \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \ln p = \sum_{p \leqslant x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \ln p + \sum_{p \leqslant x} \sum_{k \geqslant 2} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \ln p \\ &= x \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \leqslant x} \left\{ \frac{x}{p} \right\} \ln p + \sum_{p \leqslant x} \sum_{k \geqslant 2} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \ln p. \end{aligned}$$

Et en utilisant le fait que $\{x/p\} \leqslant 1$ et la majoration de $\vartheta(x)$ établie de manière élémentaire dans la preuve de Zagier (1.4) on obtient :

$$\sum_{p \leqslant x} \left\{ \frac{x}{p} \right\} \ln p \leqslant \sum_{p \leqslant x} \ln p = \vartheta(x) = O(x).$$

Donc

$$\sum_{p \leqslant x} \left\{ \frac{x}{p} \right\} \ln p = O(x).$$

De plus,

$$\sum_{p \leqslant x} \sum_{k \geqslant 2} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \ln p \leqslant x \sum_{p \leqslant x} \sum_{k \geqslant 2} \frac{\ln p}{p^k} = x \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \ln p = x \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p(p-1)} \leqslant x \sum_{n \geqslant 2} \frac{\ln n}{n(n-1)}.$$

Étant donné la série convergence de la série de Bertrand $\sum_{n \geqslant 2} \ln(n)/\{n(n-1)\}$, il découle

$$\sum_{p \leqslant x} \sum_{k \geqslant 2} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \ln p = O(x).$$

Ainsi, on a la formule asymptotique :

$$\ln(N!) = x \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} + O(x). \tag{22}$$

Avec (21) et (22) on obtient :

$$\frac{\ln(N!)}{x} = \ln x - 1 + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} + O(1).$$

Et alors,

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

$\square$

2.7 Second théorème et formule de Mertens

Théorème 2.21 (Second théorème de Mertens)**.** *On a le développement asymptotique*

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + a + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \quad \textit{avec } a > 0.$$

Démonstration. Tout d'abord remarquons que

$$\int_p^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u)^2} = \frac{1}{\ln p}.$$

Utilisons la transformation d'Abel continue (2.17) en posant $a(n) = \ln(n)/n$ si $n = p$; et 0 sinon, et $f(t) = 1/\ln t$:

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + A(x)f(x) - A(2)f(2) - \int_2^x A(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\ln x} \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} + \int_2^x \sum_{p \leqslant t} \frac{\ln p}{p} \frac{1}{t(\ln t)^2}\ \mathrm{d}t.$$

Et d'après le premier théorème de Mertens (2.20) on a

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

Ce qui montre que $R(x) := \sum_{p \leqslant x} \ln(p)/p - \ln x$ est bornée. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} &= \frac{R(x)}{\ln x} + 1 + \int_2^x \frac{1}{t \ln t}\ \mathrm{d}t + \int_2^x \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{R(x)}{\ln x} + 1 + \ln \ln x - \ln \ln 2 + \int_2^x \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \ln \ln x + a + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).
\end{aligned}$$

avec

$$a = 1 - \ln \ln 2 + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\ln t)^2}\ \mathrm{d}t \approx 0,26.$$

□

Théorème 2.22 (Formule de Mertens)**.** *On a la formule asymptotique*

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = C \ln x + O(1) \quad (x \geqslant 1).$$

Remarque 2.23. *En fait $C = \mathrm{e}^\gamma$ où γ désigne la constante d'Euler mais cette précision n'est pas nécessaire pour la preuve du théorème des nombres premiers.*

Démonstration. Tout d'abord pour $p \to +\infty$,

$$\mathrm{e}^{-1/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = 1+O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Or la série $\sum_p 1/p^2$ converge (car extraite de la série de Riemann de terme général $1/n^2$) donc d'après le lemme 2.3 le produit $\prod_p \left(1+O\left(1/p^2\right)\right)$ converge. Ainsi le produit $\prod_p \mathrm{e}^{-1/p}\left(1-1/p\right)^{-1}$ est convergent.
Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} &= \prod_{p\leqslant x}\mathrm{e}^{1/p}\mathrm{e}^{-1/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p\leqslant x}\mathrm{e}^{1/p}\prod_{p\leqslant x}\mathrm{e}^{-1/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\\ &= \exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)\prod_{p\leqslant x}\mathrm{e}^{-1/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Il découle du second théorème de Mertens (2.21)

$$\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)\prod_{p\leqslant x}\mathrm{e}^{-1/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{a}\ln x\prod_{p}\mathrm{e}^{-1/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}+O(1) = C\ln x+O(1)$$

avec

$$C = \mathrm{e}^{a}\prod_{p}\mathrm{e}^{-1/p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

□

2.8 Quelques lemmes techniques

Lemme 2.24. *Soit h une fonction définie sur $[y,+\infty[$, positive, décroissante au sens large et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $t \geqslant y$, on a :*

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\ln p}{p}h(pt) = \int_t^{yt}\frac{h(v)}{v}\,\mathrm{d}v + O(h(y)).$$

Et pour tout $t \geqslant 1$:

$$\sum_{y/t<p\leqslant y}\frac{\ln p}{p}h(pt) = \int_y^{yt}\frac{h(v)}{v}\,\mathrm{d}v + O(h(y)).$$

Démonstration. Soit $t \geqslant y$.
Utilisons la transformation d'Abel continue (2.17) avec $a(p) = \ln(p)/p$ et $f(p) = h(pt)$.
Et d'après le premier théorème de Mertens (2.20) on a

$$A(y) = \sum_{p\leqslant y}\frac{\ln p}{p} = \ln y + O(1).$$

Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leqslant y} a(p)f(p) &= A(y)f(y) - \int_1^y A(v)f'(v)\ \mathrm{d}v \\
&= \ln y\ f(y) + O(f(y)) - \int_1^y \ln v\ f'(v)\ \mathrm{d}v + \int_1^y O(f'(v))\ \mathrm{d}v \\
&= O(f(y)) + \int_1^y \frac{h(vt)}{v}\ \mathrm{d}v \\
&= \int_t^{yt} \frac{h(u)}{u}\ \mathrm{d}u + O(h(y)).
\end{aligned}$$

Et pour $t \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{y/t<p\leqslant y} \frac{\ln p}{p} h(pt) &= \sum_{p\leqslant y} \frac{\ln p}{p} h(pt) - \sum_{p\leqslant y/t} \frac{\ln p}{p} h(pt) \\
&= \int_t^{yt} \frac{h(v)}{v}\ \mathrm{d}v + O(h(y)) - \int_t^{y} \frac{h(v)}{v}\ \mathrm{d}v + O(h(y)) \\
&= \int_y^{yt} \frac{h(v)}{v}\ \mathrm{d}v + O(h(y)).
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.25. *Posons pour $s > 0$:*

$$k(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx}\ \mathrm{e}^{f(x)}\ \mathrm{d}x, \quad \textit{où} \;\; f(x) = \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\ \mathrm{d}u.$$

Alors la fonction k est positive, décroissante et infiniment dérivable. De plus :

$$sk(s) - \int_s^{s+1} k(u)\ \mathrm{d}u = 1 \quad \textit{pour tout } s > 0.$$

Démonstration. Prenons $x \geqslant 1$ et cherchons tout d'abord un équivalent de $f(x)$ pour $x \to +\infty$. On a l'expression :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\ \mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\ \mathrm{d}u + \int_1^x \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u - \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\ \mathrm{d}u = O(1) + \ln x - \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\ \mathrm{d}u.$$

De l'estimation

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\ \mathrm{d}u \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x} = O(1),$$

il vient $f(x) = \ln x + O(1)$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

Ainsi, k est bien définie car $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x = o(x)$. La positivité et la décroissance de k découlent de la positivité de l'intégrale, la dérivabilité du théorème de dérivation sous le signe intégral.

De plus, par le théorème de Fubini-Tonelli on a pour $s > 0$:

$$\begin{aligned}\int_s^{s+1} k(u)\ \mathrm{d}u &= \int_s^{s+1}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ux}\ \mathrm{e}^{f(x)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\int_s^{s+1} \mathrm{e}^{-ux}\ \mathrm{e}^{f(x)}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-sx}}{x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{e}^{f(x)}\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx}\ f'(x)\ \mathrm{e}^{f(x)}\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En effectuant une intégration par parties et en utilisant le fait que $f(x) = o(x)$ on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx}\ f'(x)\ \mathrm{e}^{f(x)}\ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-sx}\ \mathrm{e}^{f(x)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -s\ \mathrm{e}^{-sx}\ \mathrm{e}^{f(x)}\ \mathrm{d}x = -1 + sk(s).$$

Soit

$$sk(s) - \int_s^{s+1} k(u)\ \mathrm{d}u = 1.$$

□

Lemme 2.26. *Soit k la fonction définie au lemme 2.25, on a :*

$$\int_1^2 k(u)(2-u)\ \mathrm{d}u = C - 1 \quad \textit{avec} \quad C = \lim_{x\to+\infty} \ln(x)^{-1}\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} > 1.$$

Démonstration. <u>1</u>

Tout d'abord, établissons une égalité de convolution.
Soit $\nu \in \mathbb{N}$,

$$(\Lambda * 1)(p^\nu) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \nu} \Lambda(p^k) = \sum_{1\leqslant k\leqslant \nu} \ln p = \ln p^\nu.$$

Donc $\Lambda * \mathbf{1} = \ln$ et alors $v_y \ln = v_y\Lambda * v_y$. On obtient l'expression

$$\sum_{n\leqslant t} v_y(n)\ln n = \sum_{n\leqslant t}\left(v_y\Lambda * v_y\right)(n)$$

En posant $f = v_y\Lambda$ et $g = v_y$ on a par le principe de l'hyperbole :

$$\sum_{n\leqslant t} v_y(n)\ln n = \sum_{n\leqslant t}\left(v_y\Lambda * v_y\right)(n) = \sum_{n\leqslant t} f(n) G\left(\frac{t}{n}\right) = \sum_{n\leqslant t} v_y(n)\Lambda(n)\ V_y^*\left(\frac{t}{n}\right)$$

Et en remarquant que

$$V_y^*(t)\ln t = \sum_{n\leqslant t} v_y(n)\ln n + \sum_{n\leqslant t} v_y(n)\ln\left(\frac{t}{n}\right),$$

on a

$$V_y^*(t)\ln t = \sum_{n\leqslant t} v_y(n)\Lambda(n)\ V_y^*\left(\frac{t}{n}\right) + \sum_{n\leqslant t} v_y(n)\ln\left(\frac{t}{n}\right).$$

Par définition de Λ et de v_y, on a :

$$V_y^*(t)\ln t = \sum_{\substack{p\leqslant t\\ p\leqslant y}} V_y^*\left(\frac{t}{p}\right)\ln p + \sum_{\substack{p\leqslant y\\ p^r\leqslant t, r\geqslant 2}} V_y^*\left(\frac{t}{p^r}\right)\ln p + \sum_{n\leqslant t} v_y(n)\ln\left(\frac{t}{n}\right).$$

Posons pour $t \geqslant y$: $h(t) := (1/\ln y)\ k(\ln t/\ln y)$. Alors en multipliant par $h(t)/t^2$ et en intégrant :

$$\int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2} \ln t\ h(t)\ \mathrm{d}t = E_0 + E_1 + E_2, \tag{23}$$

où

$$E_0 = \int_y^{+\infty} \sum_{\substack{p \leqslant t \\ p \leqslant y}} \ln p\ \ V_y^*\left(\frac{t}{p}\right) \frac{h(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t,$$

$$E_1 = \int_y^{+\infty} \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p^r \leqslant t,\ r \geqslant 2}} \ln p\ \ V_y^*\left(\frac{t}{p^r}\right) \frac{h(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t,$$

$$E_2 = \int_y^{+\infty} \sum_{n \leqslant t} v_y(n) \ln\left(\frac{t}{n}\right) \frac{h(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

<u>2^{ème} ÉTAPE :</u> Majoration de E_1.

La décroissance de h entraîne que :

$$E_1 \leqslant h(y) \int_y^{+\infty} \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p^r \leqslant t,\ r \geqslant 2}} \ln p\ V_y^*\left(\frac{t}{p^r}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = h(y) \sum_{\substack{p \leqslant y \\ r \geqslant 2}} \ln p \int_y^{+\infty} \mathbb{1}_{t \geqslant p^r}\ V_y^*\left(\frac{t}{p^r}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Et en effectuant le changement de variable $u = t/p^r$ on obtient :

$$E_1 \leqslant h(y) \sum_{\substack{p \leqslant y \\ r \geqslant 2}} \ln p \int_{y/p^r}^{+\infty} \mathbb{1}_{u \geqslant 1} \frac{V_y^*(u)}{p^r\ u^2}\ \mathrm{d}u.$$

Si $y/p^r \leqslant 1$, alors l'intégrale sur $[y/p^r, +\infty[$ est égale à celle sur $[1, +\infty[$. Sinon, $y/p^r > 1$ et alors l'intégrale sur $[y/p^r, +\infty[$ est majorée par celle sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, dans tous les cas, l'intégrale sur $[y/p^r, +\infty[$ est majorée par celle sur $[1, +\infty[$:

$$E_1 \leqslant h(y) \sum_{\substack{p \leqslant y \\ r \geqslant 2}} \frac{\ln p}{p^r} \int_1^{+\infty} \frac{V_y^*(u)}{u^2}\ \mathrm{d}u \leqslant h(y) \sum_{\substack{r \geqslant 2 \\ p}} \frac{\ln p}{p^r} \int_1^{+\infty} \frac{V_y^*(u)}{u^2}\ \mathrm{d}u. \tag{24}$$

<u>3^{ème} ÉTAPE :</u> Majoration de E_2.

De même avec E_2, en exploitant la décroissance de h et en faisant le changement de variable $u = t/n$:

$$\begin{aligned} E_2 &\leqslant h(y) \sum_n v_y(n) \int_y^{+\infty} \mathbb{1}_{t \geqslant n} \frac{\ln(t/n)}{t^2}\ \mathrm{d}t = h(y) \sum_n v_y(n) \int_{y/n}^{+\infty} \mathbb{1}_{u \geqslant 1} \frac{\ln u}{n\ u^2}\ \mathrm{d}u \\ &\leqslant h(y) \sum_n \frac{v_y(n)}{n} \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2}\ \mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{25}$$

La dernière inégalité provenant de la même discussion que précédemment pour la 2^{ème} étape.

4ème étape : Bornitude de E_1 et de E_2.

On a l'égalité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{V_y^*(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_n v_y(n) \int_n^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_n \frac{v_y(n)}{n} = \prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \quad \text{par le lemme 2.6.}$$

D'après la formule de Mertens (2.22) on a l'estimation

$$\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = O(\ln y).$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{V_y^*(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_n \frac{v_y(n)}{n} = O(\ln y).$$

De plus, $h(y) = k(1)/\ln y = O(1/\ln y)$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln u/u^2\,\mathrm{d}u$ et la série $\displaystyle\sum_{\substack{r\geqslant 2\\ p}} \ln(p)/p^r$ convergent, on obtient alors par les majorations (24) et (25) que $E_1 = O(1)$ et $E_2 = O(1)$.

5ème étape : Expression de E_0.

Par ailleurs, on peut réécrire l'expression de E_0 en effectuant le changement de variable $u = t/p$:

$$\begin{aligned}
E_0 &= \int_y^{+\infty} \sum_{\substack{p\leqslant t\\ p\leqslant y}} \ln p\; V_y^*\left(\frac{t}{p}\right)\frac{h(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{p\leqslant y} \int_y^{+\infty} \ln p\; V_y^*\left(\frac{t}{p}\right)\frac{h(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{p\leqslant y} \int_{y/p}^{+\infty} \ln p\; V_y^*(u)\frac{h(up)}{p\;u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{p\leqslant y} \frac{\ln p}{p} \int_{y/p}^{y} \frac{V_y^*(t)}{t^2} h(pt)\,\mathrm{d}t + \sum_{p\leqslant y} \frac{\ln p}{p} \int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2} h(pt)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{y} \frac{V_y^*(t)}{t^2} \sum_{y/t<p\leqslant y} \frac{\ln p}{p} h(pt)\,\mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2} \sum_{p\leqslant y} \frac{\ln p}{p} h(pt)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

De plus la fonction h hérite de la positivité, de la décroissance et de la régularité $\mathcal{C}^1$ de la fonction k. Ainsi par le lemme 2.24 on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_y^{+\infty} \sum_{\substack{p\leqslant t\\ p\leqslant y}} \ln p\; V_y^*\left(\frac{t}{p}\right)\frac{h(t)}{t^2}\mathrm{d}t &= \int_1^{y} \frac{V_y^*(t)}{t^2}\left\{\int_y^{yt} \frac{h(v)}{v}\,\mathrm{d}v + O(h(y))\right\}\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2}\left\{\int_t^{yt} \frac{h(v)}{v}\,\mathrm{d}v + O(h(y))\right\}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Exploitons le fait que $O(h(y)) = O(1/\ln y)$ et que $\int_1^y V_y^*(t)/t^2 \text{ d}t = O(\ln y)$:

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{V_y^*(t)}{t^2}\left\{\int_y^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v + O(h(y))\right\} \text{ d}t &= \int_1^y \frac{V_y^*(t)}{t^2}\int_y^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v \text{ d}t + \int_1^y \frac{V_y^*(t)}{t^2} O(h(y)) \text{ d}t \\ &= \int_1^y \frac{V_y^*(t)}{t^2}\int_y^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v \text{ d}t + O(1).\end{aligned}$$

<u>6^{ÈME} ÉTAPE :</u> Nouvelle expression de l'équation (23).

Étant donné que $E_1 = O(1)$ et $E_2 = O(1)$ on peut réécrire l'équation (23) sous la forme :

$$\int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2}\left\{\ln t \; h(t) - \int_t^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v\right\}\text{d}t = \int_1^y \frac{V_y^*(t)}{t^2}\int_y^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v \text{ d}t + O(1).$$

Or par définition de $h(t) = k(\ln t/\ln y)/\ln y$ on a en notant $s := \ln t/\ln y > 0$ $(t \geqslant 1)$:

$$\ln t \; h(t) = \frac{\ln t}{\ln y} \; k\left(\frac{\ln t}{\ln y}\right) = sk(s)$$

Et en effectuant le changement de variable $u = \ln v/\ln y$ on a :

$$\int_t^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v = \int_t^{yt} \frac{k(\ln v/\ln y)}{\ln y \; v} \text{ d}v = \int_s^{s+1} k(u) \text{ d}u.$$

Et le lemme 2.25 donne pour tout $t \geqslant 1$:

$$sk(s) - \int_s^{s+1} k(u) \text{ d}u = 1.$$

C'est-à-dire

$$\ln t \; h(t) - \int_t^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v = 1.$$

Ce qui implique

$$\int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2} \text{ d}t = \int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2}\left\{\ln t \;\; h(t) - \int_t^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v\right\} \text{ d}t = \int_1^y \frac{V_y^*(t)}{t^2}\int_y^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v \text{ d}t + O(1).$$

<u>7^{ÈME} ÉTAPE :</u> Conclusion.

Pour $t \leqslant y$ on a $V_y^*(t) = \lfloor t \rfloor = t + O(1)$.
Premièrement,

$$I_1 := \int_1^y \frac{O(1)}{t^2}\int_y^{yt} \frac{h(v)}{v} \text{ d}v \text{ d}t \leqslant \int_1^y \frac{O(1)}{t^2}\frac{h(y)}{yt} y(t-1) \text{ d}t = O\left(\frac{h(y)}{y}\right) = O(1).$$

Deuxièmement avec le changement de variable $u = \ln v / \ln y$ on a :

$$I_2 := \int_1^y \frac{t}{t^2} \int_y^{yt} \frac{h(v)}{v} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t = \int_1^y \int_1^{1+\ln t/\ln y} \frac{k(u)}{t} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}t.$$

Puis par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_1^y \int_1^{1+\ln t/\ln y} \frac{k(u)}{t} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}t &= \int_1^2 \left(\int_{y^{u-1}}^y \frac{\mathrm{d}t}{t} \right) k(u) \, \mathrm{d}u = \int_1^2 \{\ln y - (u-1)\ln y\} \, k(u) \, \mathrm{d}u \\ &= \ln y \int_1^2 k(u)(2-u) \, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t &= \int_1^y \frac{V_y^*(t)}{t^2} \int_y^{yt} \frac{h(v)}{v} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t + O(1) = I_1 + I_2 + O(1) \\ &= \ln y \int_1^2 k(u)(2-u) \, \mathrm{d}u + O(1). \end{aligned} \tag{26}$$

Or d'après la formule de Mertens (2.22) et comme $v_y(n) = 1$ pour $n \leqslant y$ on a :

$$\int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t = \sum_n \frac{v_y(n)}{n} - \sum_{n \leqslant y} \frac{v_y(n)}{n} = \prod_{p \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} - \sum_{n \leqslant y} \frac{1}{n} = C \ln y + O(1) - \sum_{n \leqslant y} \frac{1}{n}.$$

Et par une comparaison série intégrale classique on a le développement asymptotique de la série harmonique $\sum_{n \leqslant y} 1/n = \ln y + O(1)$ ce qui donne :

$$\int_y^{+\infty} \frac{V_y^*(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t = C \ln y + O(1) - \ln y = (C-1)\ln y + O(1). \tag{27}$$

En comparant (26) et (27) on obtient l'égalité

$$\int_1^2 k(u)(2-u) \, \mathrm{d}u = C - 1.$$

Et $C > 1$ car le membre de gauche est l'intégrale d'une fonction continue strictement positive. □

2.9 Une dernière inégalité

Proposition 2.27. *On a la majoration*

$$\int_y^{+\infty} \frac{|V_y(t)|}{t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant \beta(C-1)\ln y + o(\ln y). \tag{28}$$

Démonstration. Tout d'abord montrons une égalité de convolution.
Soit $\nu \geqslant 2$, alors :

$$(\mu * \Lambda)(p^\nu) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \nu} \mu(p^k)\Lambda(p^{\nu-k}) = \Lambda(p^\nu) - \Lambda(p^{\nu-1}) = 0 = -(\mu \ln)(p^\nu).$$

Et on a les égalités :

$$(\mu * \Lambda)(p) = \mu(1)\Lambda(p) + \mu(p)\Lambda(1) = \ln p = -(\mu \ln)(p) \quad \text{et} \quad (\mu * \Lambda)(1) = \mu(1)\Lambda(1) = 0 = -(\mu \ln)(1).$$

Donc $-\mu \ln = \mu * \Lambda$ et en multipliant par v_y on obtient $-v_y \mu \ln = v_y \mu * v_y \Lambda$.
D'où l'expression :

$$\sum_{n \leqslant t} -v_y(n)\mu(n) \ln n = \sum_{n \leqslant t} \left(v_y \mu * v_y \Lambda\right)(n).$$

En définissant $f = v_y \Lambda$ et $g = \mu v_y$, on a :

$$\sum_{n \leqslant t} -v_y(n)\mu(n) \ln n = \sum_{n \leqslant t} \left(v_y \mu * v_y \Lambda\right)(n) = \sum_{n \leqslant t} f(n) G\left(\frac{t}{n}\right) = \sum_{n \leqslant t} v_y(n)\Lambda(n)\ V_y\left(\frac{t}{n}\right).$$

Et en remarquant que

$$V_y(t) \ln t = \sum_{n \leqslant t} v_y(n)\mu(n) \ln n + \sum_{n \leqslant t} v_y(n)\mu(n) \ln\left(\frac{t}{n}\right),$$

on a

$$V_y(t) \ln t = -\sum_{n \leqslant t} v_y(n)\Lambda(n)\ V_y\left(\frac{t}{n}\right) + \sum_{n \leqslant t} v_y(n)\mu(n) \ln\left(\frac{t}{n}\right).$$

Et par l'inégalité triangulaire

$$|V_y(t)| \ln t \leqslant \sum_{n \leqslant t} v_y(n)\Lambda(n)\ \left|V_y\left(\frac{t}{n}\right)\right| + \sum_{n \leqslant t} v_y(n) \ln\left(\frac{t}{n}\right).$$

Et avec la fonction h déjà définie par $h(t) := (1/\ln y)\ k(\ln t / \ln y)$ pour $t \geqslant y$, on obtient en procédant exactement de la même façon que les étapes 1 à 6 du lemme 2.26 :

$$\int_y^{+\infty} \frac{|V_y(t)|}{t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2} \int_y^{yt} \frac{h(v)}{v}\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}t + O(1).$$

Or si $1 \leqslant t \leqslant y, |V_y(t)| = M(t)$. Et si $t \geqslant x_\beta$, on a $|M(t)| \leqslant \beta t$.
Avec le changement de variable $u = \ln v / \ln y$ et le théorème de Fubini-Tonelli on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^y \frac{|M(t)|}{t^2} \int_y^{yt} \frac{h(v)}{v}\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}t &= \int_1^y \int_1^{1+\ln t/\ln y} \frac{|M(t)| k(u)}{t^2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_1^y \frac{\beta}{t} \int_1^{1+\ln t/\ln y} k(u)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}t + \int_1^{x_\beta} \frac{1}{t} \int_1^{1+\ln t/\ln y} k(u)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}t \\
&= \beta \ln y \int_1^2 (2-u) k(u)\ \mathrm{d}u + \int_1^{1+\ln x_\beta/\ln y} k(u) \int_{y^{u-1}}^{x_\beta} \frac{\mathrm{d}t}{t}\ \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Or par décroissance de k

$$\begin{aligned}
\int_1^{1+\ln x_\beta/\ln y} k(u) \int_{y^{u-1}}^{x_\beta} \frac{\mathrm{d}t}{t}\ \mathrm{d}u &\leqslant k(1) \int_1^{1+\ln x_\beta/\ln y} \ln x_\beta - (u-1)\ln y\ \mathrm{d}u \\
&= k(1) \left\{ \frac{(\ln x_\beta)^2}{\ln y} - \ln y \int_0^{\ln x_\beta/\ln y} u\ \mathrm{d}u \right\} \\
&= k(1) \left\{ \frac{(\ln x_\beta)^2}{\ln y} - \frac{\ln y}{2} \left(\frac{\ln x_\beta}{\ln y} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{k(1)(\ln x_\beta)^2}{2\ln y} = O(1).
\end{aligned}$$

Ce qui fournit

$$\int_y^{+\infty} \frac{|V_y(t)|}{t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \beta \left(\int_1^2 k(u)(2-u)\ \mathrm{d}u \right) \ln y + O(1).$$

Et le lemme 2.26 donne :

$$\int_y^{+\infty} \frac{|V_y(t)|}{t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \beta(C-1)\ln y + O(1) = \beta(C-1)\ln y + o(\ln y).$$

□

2.10 Preuve du théorème des nombres premiers

Introduisons la fonction sommatoire de la fonction de Von Mangoldt ψ et la fonction nombre de diviseurs τ :

$$\psi(x) := \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \quad \text{et} \quad \tau(n) := \sum_{d|n} 1.$$

On remarque que $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$.

Théorème 2.28. *Si*

$$\frac{M(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

alors

$$\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

Remarque 2.29. *En réalité ce théorème est une équivalence.*

Démonstration. <u>1</u>

Démonstration. 1^re^ ÉTAPE : Identité de convolution et évaluation d'une fonction sommatoire.

Comme $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$ et $\Lambda * \mathbf{1} = \ln$, $\tau * \mu = \mathbf{1}$ et $\Lambda = \ln * \mu$. On a alors

$$\Lambda - \mathbf{1} = \ln * \mu - \tau * \mu = (\ln - \tau) * \mu = (\ln - \tau + 2\gamma\mathbf{1}) * \mu - 2\gamma\delta = h * \mu - 2\gamma\delta, \tag{29}$$

où $h := \ln - \tau + 2\gamma\mathbf{1}$, γ étant la constante d'Euler et

$$H(x) := \sum_{n\leqslant x} h(n) = \sum_{n\leqslant x} \ln n - \sum_{n\leqslant x} \tau(n) + 2\gamma x.$$

Par une comparaison série intégrale classique on a le développement asymptotique

$$\sum_{n\leqslant z}\frac{1}{n}=\ln z+\gamma+O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Appliquons le principe de l'hyperbole (2.8) avec $y=z=\sqrt{x}$ et $f=g=1$. On a donc $F(x)=G(x)=\lfloor x\rfloor$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\tau(n) &= \sum_{n\leqslant x}\mathbf{1}*\mathbf{1}(n)=2\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor-\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor^2=2x\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n}-x+O\left(\sqrt{x}\right)\\ &= x\ln x+(2\gamma-1)x+O\left(\sqrt{x}\right).\end{aligned}$$

Et encore avec une comparaison série intégrale classique on a

$$\sum_{n\leqslant x}\ln n=x\ln x-x+O(\ln x).$$

Ainsi

$$H(x)=x\ln x-x+O(\ln x)-x\ln x-(2\gamma-1)x+O\left(\sqrt{x}\right)+2\gamma x=O(\sqrt{x}).$$

<u>2</u>

2$^{\text{ÈME}}$ ÉTAPE : Évaluation d'une seconde fonction sommatoire.
Montrons que

$$K(x):=\sum_{n\leqslant x}h*\mu(n)=o(x).$$

Utilisons à nouveau le principe de l'hyperbole (2.8) pour $y>2$ fixé :

$$K(x)=\sum_{n\leqslant y}h(n)M\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{m\leqslant x/y}\mu(m)H\left(\frac{x}{m}\right)-M\left(\frac{x}{y}\right)H(y).$$

Alors par l'inégalité triangulaire

$$|K(x)|\leqslant\sum_{m\leqslant x/y}\left|H\left(\frac{x}{m}\right)\right|+\sum_{n\leqslant y}\left|h(n)M\left(\frac{x}{n}\right)\right|+\left|M\left(\frac{x}{y}\right)H(y)\right|.$$

Et comme $|M(x)|=o(x)$, pour $n\in\mathbb{N}$ fixé, $M(x/n)/x\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Ainsi, pour tout y fixé,

$$\frac{1}{x}\left\{\sum_{n\leqslant y}\left|h(n)M\left(\frac{x}{n}\right)\right|+\left|M\left(\frac{x}{y}\right)H(y)\right|\right\}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

Et donc toujours pour $y>2$ fixé :

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\frac{K(x)}{x}\right|\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{x}\sum_{m\leqslant x/y}\left|H\left(\frac{x}{m}\right)\right|=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{x}\sum_{m\leqslant x/y}O\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right).$$

Or par une comparaison série intégrale on a

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n}.$$

Alors
$$\frac{1}{x}\sum_{m\leqslant x/y} O\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times O\left(2\sqrt{\frac{x}{y}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$
Ainsi on obtient :
$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \left|\frac{K(x)}{x}\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$
Et comme y peut être choisi arbitrairement grand, cela implique $K(x) = o(x)$.

<u>3^{ème} étape :</u> Conclusion.

La formule (29) fournit, compte tenu de ce qui précède,
$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda - \mathbf{1}\ (n) = \sum_{n\leqslant x} h * \mu\ (n) - 2\gamma = K(x) - 2\gamma = o(x).$$
Ainsi
$$\psi(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) = \sum_{n\leqslant x} 1 + \sum_{n\leqslant x} \Lambda - \mathbf{1}\ (n) = x + o(x).$$
Donc
$$\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$
$\square$

Lemme 2.30. *On a la formule asymptotique*
$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x\ln x - x + O(\ln x) \quad (x \geqslant 2).$$

Démonstration. Rappelons la formule asymptotique (21) :
$$\ln(n!) = n\ln n - n + O(\ln n). \tag{30}$$
D'autre part exploitons la décomposition en facteurs premiers de $n!$.
On a pour tout $m \geqslant 1$:
$$\ln m = \sum_{p^\nu | m} \ln p.$$
Ainsi il s'ensuit en intervertissant les sommations
$$\ln(n!) = \sum_{m\leqslant n} \ln m = \sum_{p^\nu\leqslant n} \ln p \sum_{\substack{p^\nu | m \\ m\leqslant n}} 1 = \sum_{p^\nu\leqslant n} \ln p \left\lfloor \frac{n}{p^\nu} \right\rfloor = \sum_{m\leqslant n} \Lambda(m) \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor.$$
L'estimation (30) fournit le résultat. $\square$

Théorème 2.31 (Théorème de Tchébychev)**.** *On a pour* $x \geqslant 2$

$$x \ln 2 + O(\ln x) \leqslant \psi(x) \leqslant x \ln 4 + O((\ln x)^2).$$

Démonstration. Posons pour $u > 0$, $\chi(u) := \lfloor u \rfloor - 2\lfloor u/2 \rfloor$. Alors χ est une fonction 2-périodique qui vérifie

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant u < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant u < 2. \end{cases}$$

On note aussi pour $k \in \mathbb{N}$, $B(k) := \sum_{n \leqslant k} \Lambda(n) \lfloor k/n \rfloor$ et pour $x \geqslant 2$, $B(x) = B(\lfloor x \rfloor)$.

Calculons $B_2(x) := B(x) - 2B(x/2)$.

D'une part on a d'après le développement asymptotique du lemme 2.30

$$B_2(x) = x \ln x - x - x\{\ln x - \ln 2 - 1\} + O(\ln x) = x \ln 2 + O(\ln x).$$

D'autre part par définition,

$$B_2(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - 2 \sum_{n \leqslant x/2} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{2n} \right\rfloor = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \chi\left(\frac{x}{n}\right).$$

En exploitant que $\chi(x/n) = 1$ pour $x/2 < n \leqslant x$ et nul sinon, on obtient :

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{x/2 < n \leqslant x} \Lambda(n) = B_2(x) \leqslant \psi(x).$$

Ainsi on obtient la minoration

$$x \ln 2 + O(\ln x) \leqslant \psi(x) \quad (x \geqslant 2). \tag{31}$$

Et de manière inductive :

$$\psi(x) \leqslant B_2(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant B_2(x) + B_2\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) \leqslant \cdots \leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} B_2\left(\frac{x}{2^j}\right) + \psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right).$$

En prenant $k_x = \lfloor \ln x / \ln 2 \rfloor$ afin que $\psi(x/2^{k_x+1}) = 0$, on obtient alors

$$\psi(x) \leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant k_x} B_2\left(\frac{x}{2^j}\right) \leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant k_x} \left\{\frac{x \ln 2}{2^j} + O(\ln x)\right\} \leqslant 2x \ln 2 + O\left((\ln x)^2\right). \tag{32}$$

Les inégalités (31) et (32) donnent

$$x \ln 2 + O(\ln x) \leqslant \psi(x) \leqslant x \ln 4 + O((\ln x)^2).$$

$\square$

Lemme 2.32. *On a le développement asymptotique*

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\ln x} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right) \quad (x \geqslant 2).$$

Démonstration. On a pour $x \geqslant 2$ et $\nu \geqslant 1$ l'expression $\psi(x) = \sum_{\substack{p^\nu \leqslant x \\ \nu \geqslant 1}} \ln p$.
Pour p fixé, il a $\lfloor \ln(x)/\ln(p) \rfloor$ valeurs de ν telles que $p^\nu \leqslant x$, on a donc

$$\psi(x) = \sum_{p \leqslant x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p.$$

Et avec l'encadrement $\lfloor u \rfloor \leqslant u \leqslant 2\lfloor u \rfloor$ pour $u \geqslant 1$ il s'en suit :

$$\psi(x) \leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \pi(x) \ln x \leqslant 2\psi(x). \tag{33}$$

En remarquant que si l'on a $1 \leqslant \sqrt{x} < p \leqslant x$ alors $\lfloor \ln x / \ln p \rfloor = 1$ et l'on obtient

$$\begin{aligned}
\pi(x)\ln x - \psi(x) &= \sum_{p \leqslant x} \left(\ln x - \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p \right) \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \ln p + \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} \ln\left(\frac{x}{p}\right) \\
&\leqslant \psi(\sqrt{x}) + \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} \int_p^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= O(\sqrt{x}) + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\pi(t)}{t} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Et utilisant le théorème de Tchébychev (2.31) et le résultat (33) on obtient une majoration de $\pi(x)\ln x$ pour $x \geqslant 2$: $\pi(x)\ln x \leqslant 2\psi(x) \leqslant 2x \ln 4 + O\left((\ln x)^2\right)$ ce qui fournit

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) \leqslant O(\sqrt{x}) + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\pi(t)}{t} \,\mathrm{d}t \leqslant O(\sqrt{x}) + \int_2^x \frac{2\ln 4}{\ln t} + O\left(\frac{\ln t}{t}\right) \,\mathrm{d}t.$$

Et on a déjà vu dans la preuve du théorème 1.10 que

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t} \,\mathrm{d}t = O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Cela nous donne alors

$$\pi(x)\ln x - \psi(x) = O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

et donc pour $x \geqslant 2$

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\ln x} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right).$$

□

Théorème 2.33 (Théorème des nombres premiers)**.** *On a l'équivalent*

$$\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

Démonstration. D'après les propositions 2.9, 2.15 et 2.27 on a :

$$\begin{aligned}
\alpha = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left|\frac{M(x)}{x}\right| &\leqslant \left\{\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\} \int_1^{+\infty} \frac{|V_y(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left\{\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\} \left(\int_1^{y} \frac{|V_y(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{|V_y(t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&\leqslant \left\{\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\} \left(\frac{\beta}{\delta}\ln y + O(1) + \beta(C-1)\ln(y) + o(\ln y)\right) \\
&\leqslant \left\{\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\} \ln y \left(\frac{\beta}{\delta} + \beta(C-1) + o(1)\right).
\end{aligned}$$

Et d'après la formule de Mertens (2.22)

$$\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = C\ln y + O(1).$$

On obtient alors

$$C^{-1} = \ln y \prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right) + O(1).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\alpha = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left|\frac{M(x)}{x}\right| &\leqslant C^{-1}\left(\frac{\beta}{\delta} + \beta(C-1) + o(1)\right) \\
&\leqslant \beta\left(\frac{C^{-1}}{\delta} + 1 - C^{-1} + o(1)\right).
\end{aligned}$$

Et comme $C > 1$, on a :

$$\alpha = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left|\frac{M(x)}{x}\right| \leqslant \beta\left(\frac{C^{-1}}{\delta} + 1 - C^{-1} + o(1)\right) \leqslant \frac{\beta}{\delta}.$$

En faisant tendre β vers α on en déduit que $\alpha \leqslant \alpha/\delta < \alpha$ car $\delta > 1$, ce qui est absurde.
Il en résulte que $\alpha = 0$, ce qui entraîne

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = 0.$$

Le théorème 2.28 fournit alors

$$\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

Et le lemme 2.32 permet de conclure

$$\boxed{\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}}$$

□

Références

[Zag97] Don Zagier. « Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem ». In : *The American Mathematical Monthly* 104.8 (oct. 1997), p. 705-708.

[Dab84] Hédi Daboussi. « Sur le Théorème des Nombres Premiers ». In : *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 298, Série I (1984), p. 161-164.

[TM14] Gérald Tenenbaum et Michel Mendès France. *Les nombres premiers, entre l'ordre et le chaos.* 2e édition. Dunod, 2014.