Cours sur les processus de poissons

Jérémy Bettinger & Simon Viel

Table des matières

1 Introduction

Les processus de Poisson sont les processus ponctuels les plus simples à étudier. Les évènements particuliers modélisés sont appelés des sauts. Ils peuvent être temporels, représentant le moment d'arrivée d'une personne à un service, la date d'apparition d'une catastrophe ou bien spatiaux comme la position des antennes téléphoniques dans la ville de Sydney.
Nous étudierons les processus de Poisson simples, de paramètre constant, c'est-à-dire lorsque l'apparition des sauts est équilibrée au cours du temps (on suppose qu'il n'y a pas plus de clients arrivant à la banque à l'heure de midi) ainsi que les processus de Poisson dits inhomogènes et composés.

2 Processus de Poisson simples

2.1 Définitions et caractérisations

Définition 2.1. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique à valeurs réelles. On dit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de comptage si pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est croissante par sauts de 1, continue à droite et telle que $X_0 = 0$ p.s.*

Définition 2.2. *Un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est appelé un processus de Poisson simple de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$ lorsque :*

1. *le processus est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+^\times$, la variable aléatoire $N_{t+s} - N_s$ est indépendante de $\sigma(N_u \mid u \in [0; s])$.*
2. *Pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, la variable aléatoire $N_{t+s} - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre λt.*

Remarque 2.3.
- *Les accroissements d'un processus de Poisson sont aussi stationnaires car la loi de $N_{t+s} - N_s$ est la même pour toutes les valeurs de s.*
- *Un processus de Poisson simple est donc un cas particulier de processus de Lévy ainsi qu'un processus de naissance.*
- *Le paramètre λ est appelé l'intensité du processus. On la retrouve dans l'expression $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$.*

Exemple 2.4. *Un processus de Poisson homogène peut traditionnellement représenter le nombre de pannes d'une machine jusqu'à un instant donné en supposant la machine réparée instantanément.*

Ce processus a aussi été aussi utilisé pour modéliser le nombre de désintégrations de particules radioactives dans un intervalle de temps donné. Plus précisément, si on considère un n-uplet $\left(X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}\right)$ de variables aléatoires toutes indépendantes entre elles et toutes de loi exponentielle de paramètre λ/n (représentant les durée de vies des particules), alors le réarrangement croissant de ces variables aléatoires converge en loi vers la suite des temps de sauts d'un processus de Poisson d'intensité λ.

Théorème 2.5. *Soit N un processus de comptage sur $\mathbb{R}_+$. Alors N est un processus de Poisson simple si et seulement si :*
- *N a des accroissements indépendants et stationnaires,*
- *$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$,*
- *$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t > 1) = o(h)$.*

Définition 2.6. *Soient N un processus de Poisson simple de paramètre λ et $n \in \mathbb{N}$, on définit la date du n-ième saut comme la variable aléatoire $T_n = inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid N_t \geq n\}$ et la durée du n-ième intersaut, $n \geq 1$, comme la variable aléatoire $E_n = T_n - T_{n-1}$.*

Proposition 2.7. *Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne les instants de sauts du processus de Poisson simple alors*

$$N_t = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

De plus les durées $(E_n = T_n - T_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'intersauts sont des variables aléatoires iid de loi exponentielle de paramètre λ.

Remarque 2.8. *La proposition précédente donne une nouvelle définition équivalente du processus de Poisson simple ainsi qu'une première façon de le construire. On part d'une collection iid $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ puis on définit le processus N sur $\mathbb{R}_+$ par $N_t = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{(\sum_{k=1}^n E_k \leq t)}$ ou encore $N_t = max\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n E_k \leq t\}$.*

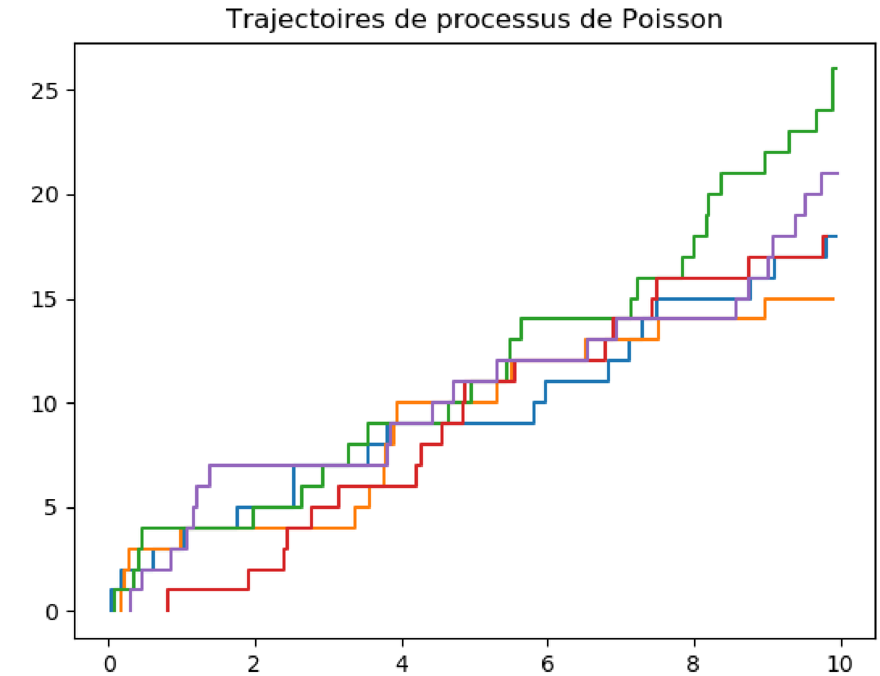
Cette construction est d'autant plus pratique lorsque l'on sait à l'avance que l'on veut générer une trajectoire de processus de Poisson jusqu'à son n-ième saut, on a alors besoin de générer n variables exponentielles indépendantes.

Corollaire 2.9. *La densité du vecteur $(T_1, \ldots, T_n)$ est donnée par*

$$f_{(T_1,\ldots,T_n)}\,(t_1, \ldots, t_n) = \lambda^n \exp\left(-\lambda t_n\right) \mathbf{1}_{(0<t_1<\ldots<t_n)}.$$

Proposition 2.10. *Conditionnellement à l'événement $\{N_t = n\}$, le vecteur des temps de sauts $(T_1, \ldots, T_n)$ a la même loi que les statistiques d'ordre de n variables aléatoires iid de loi uniforme sur $[0, t]$.*

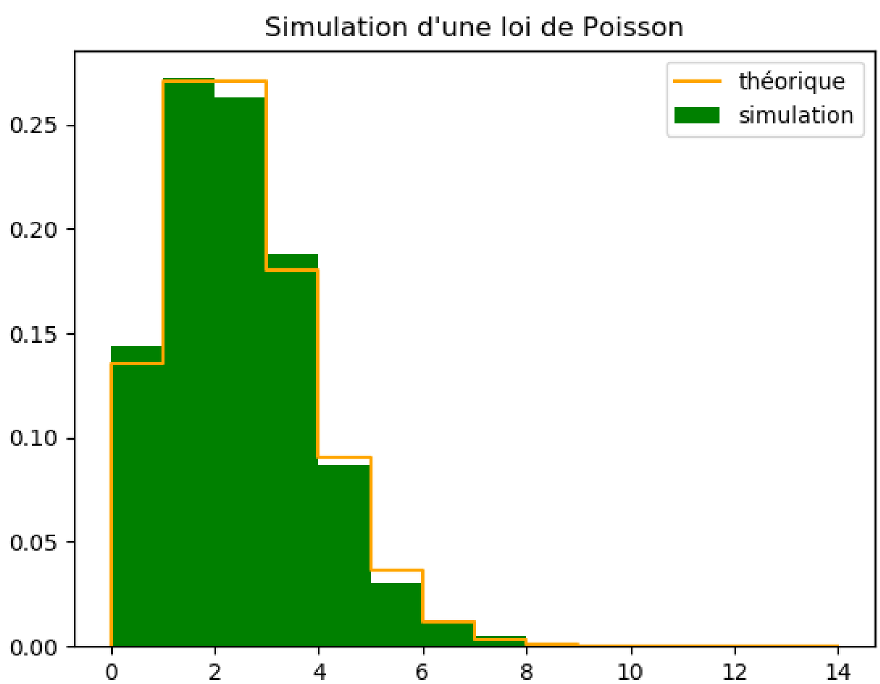
Remarque 2.11. *Cette proposition nous donne une seconde manière de simuler une trajectoire d'un processus de Poisson simple qui est cette fois adaptée lorsque l'on sait à l'avance que l'on va s'arrêter à la date T.*
Étant donné λ et T, on simule la variable aléatoire N_T, de loi de Poisson de paramètre λT puis connaissant cet entier N, on simule N variables uniformes $U_1, \ldots, U_N$ sur $[0; T]$ que l'on range dans l'ordre croissant afin d'obtenir les dates $T_1, \ldots, T_N$.
On définit enfin $N_t = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{(T_n \leq t)} = max\{n \in [\![1; N]\!] \mid T_n \leq t\}$.



Proposition 2.12 (Simulation de la loi de Poisson)**.** *Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires de loi uniforme sur* $[0,1]$. *La variable aléatoire*

$$X := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid U_1 \times \cdots \times U_{n+1} < \mathrm{e}^{-\lambda}\}$$

suit une loi de Poisson de paramètre λ.



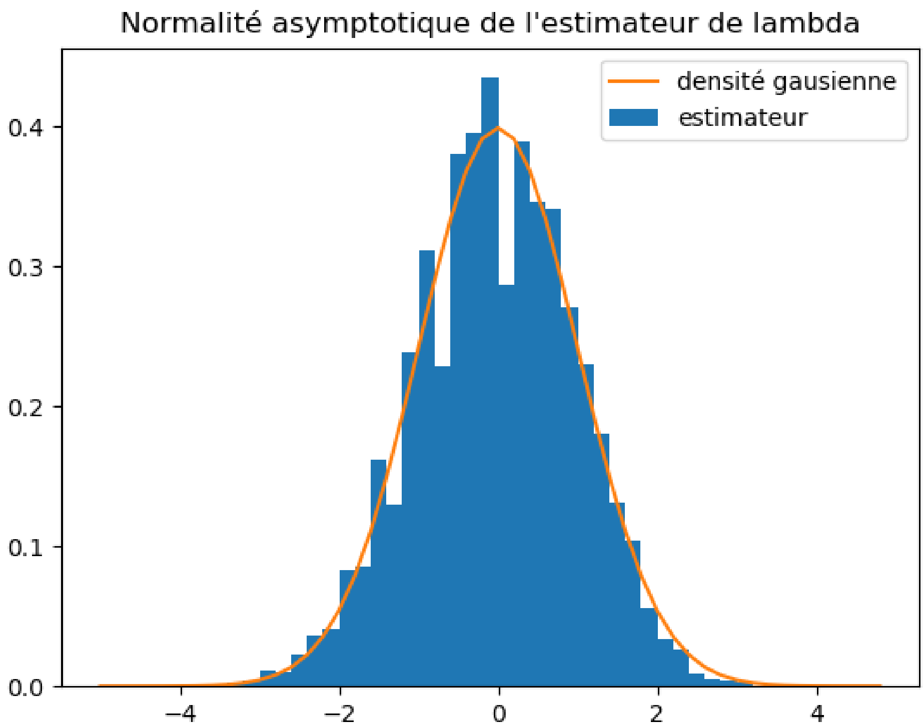
2.2 Comportement asymptotique et estimation de l'intensité

Au niveau du comportement asymptotique de N, nous avons les deux résultats suivants.

Théorème 2.13. *1. On a* $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ *p.s.*

2. On a de plus la convergence en loi

$$\sqrt{\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{N_t}{t} - \lambda \right) \xrightarrow[t \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

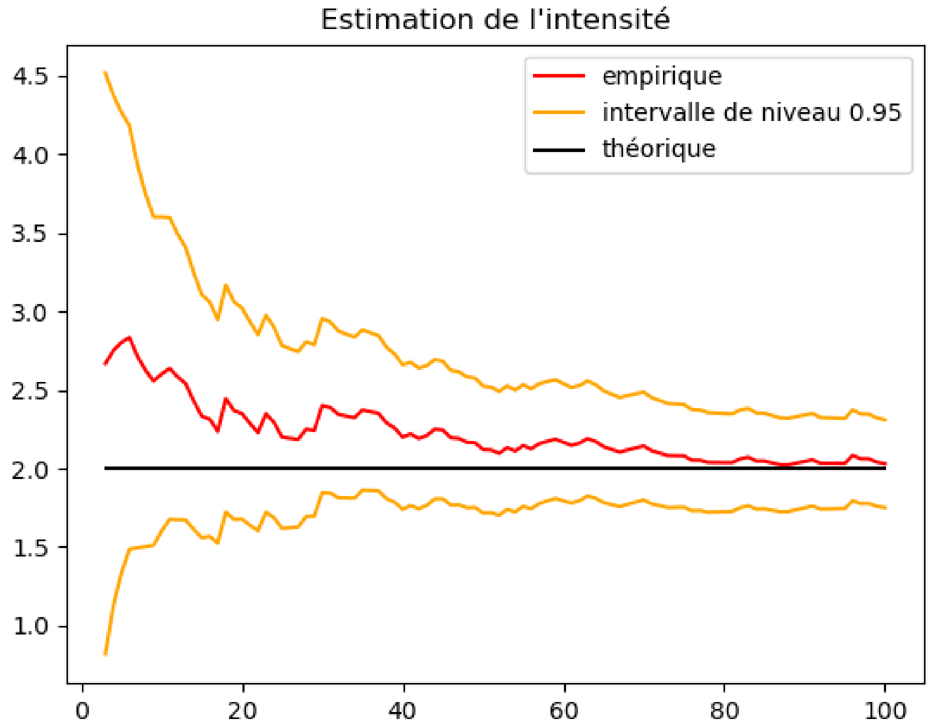


Ce théorème nous donne de bons espoirs quant à la qualité asymptotique d'estimateurs de l'intensité $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$. Afin de pouvoir parler d'estimation de l'intensité, il nous faut au préalable préciser quelles sont les variables aléatoires que l'on observe et l'on distingue alors trois cas.

1. On suppose d'abord que l'on observe l'intégralité du processus jusqu'à une date fixée T. De manière équivalente, on observe les variables N_T et $(T_1, \ldots, T_{N_T})$ et l'estimateur du maximum de vraisemblance de l'intensité λ est dans ce cas $\frac{N_T}{T}$. Le théorème précédent assure la consistance forte ainsi que la normalité asymptotiquement de cet estimateur. De plus, associé au lemme de Slutsky, il permet de donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour l'estimation de l'intensité λ basé sur l'observation du processus jusqu'à la date T

$$I_n = \left[\frac{N_T}{T} - \sqrt{\frac{N_T}{T^2}}\, q,\ \frac{N_T}{T} + \sqrt{\frac{N_T}{T^2}}\, q \right]$$

   où q est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.



Cela permet par exemple de construire un test de $(H_0) : \lambda = \lambda_0$ contre $(H_1) : \lambda \neq \lambda_0$ ou bien contre $(H_1) : \lambda > \lambda_0$.

2. On suppose maintenant que l'on observe le processus uniquement à des dates fixées $t_1 < \ldots < t_n$. La méthode de la vraisemblance nous donne alors l'estimateur $\hat{\lambda}_n = \frac{N_{t_n}}{t_n}$ qui est le même que celui obtenu en observant l'intégralité du processus jusqu'au temps t_n.

3. On suppose enfin que l'on observe une trajectoire du processus jusqu'à son n-ième saut avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, c'est-à-dire que l'on observe les variables $T_1, \ldots, T_n$.
Dans ce cas, grâce au corollaire 2.9, l'estimateur du maximum de vraisemblance devient $\hat{\lambda}_n = \frac{n}{T_n}$.
De plus, $\hat{\lambda}_n$ est un estimateur fortement consistant de λ et on dispose de la convergence en loi

$$\sqrt{n}\left(\lambda \frac{T_n}{n} - 1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

permettant d'obtenir un intervalle de confiance asymptotique pour l'estimation de λ dans ce cadre.

3 Le processus de Poisson non homogène

3.1 Définition et propriétés fondamentales

Définition 3.1. *Soit $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction localement intégrable et $\Lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par*

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds.$$

Un processus de comptage $(N_t)_{t\geq 0}$ est appelé processus de Poisson d'intensité λ lorsque :

1. *Le processus est à accroissements indépendants.*
2. *Pour tous $s < t \in \mathbb{R}_+$, $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\Lambda(t) - \Lambda(s)$.*

Remarque 3.2. — *On a $\mathbb{E}[N_t] = \mathrm{Var}\,(N_t) = \Lambda(t)$.*

— *Le processus de Poisson simple correspond à une intensité constante au cours du temps (i.e $\lambda(t) = \lambda$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$).*

Proposition 3.3. *La construction d'un processus de Poisson non homogène peut se faire à partir d'un processus de poisson simple par une modification de l'échelle de temps. Si N est un processus de Poisson simple d'intensité 1, alors le processus $\widetilde{N}$ défini par $\widetilde{N}_t = N_{\Lambda(t)}$ est un processus de Poisson non homogène d'intensité λ. Notons*

$$\Lambda^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \Lambda(x) \geq t\}$$

la pseudo-inverse continue à gauche de Λ et posons $S_n = \Lambda^{-1}(T_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, où T_n est le temps du n-ième saut de N. Alors on a

$$\widetilde{N}_t = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{(S_n\leq t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Exemple 3.4. — *On peut imaginer que l'intensité des arrivées à un guichet subit une modification brusque au cours du temps : $\lambda(t) = \lambda_1$ si $t \leq t_0$ et $\lambda(t) = \lambda_2$ si $t > t_0$.*

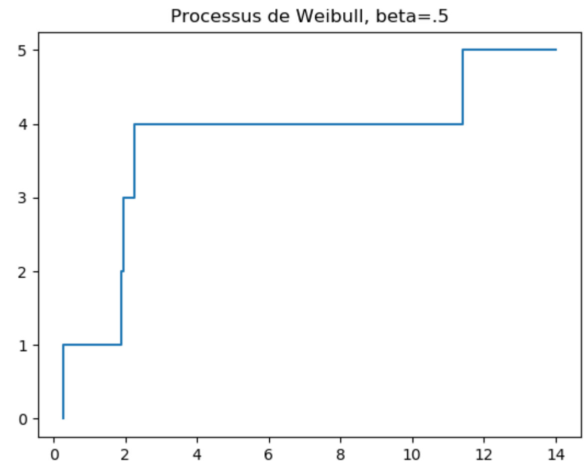
— *En fiabilité, lorsque un matériel subit une succession de pannes et lorsque chaque panne est réparée instantanément, on utilise souvent un processus de Weibull, c'est à dire un processus de Poisson non homogène d'intensité :*

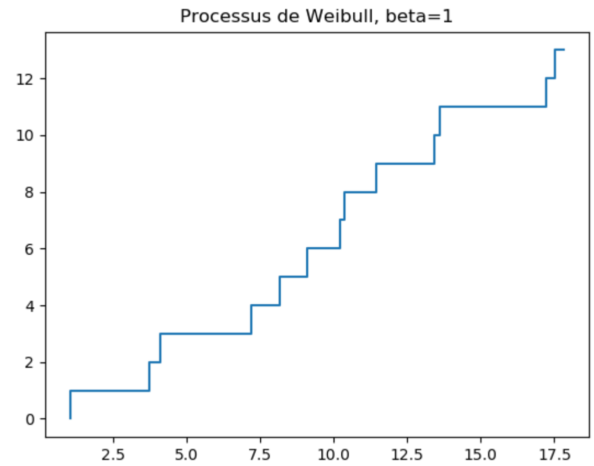
$$\lambda(s) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

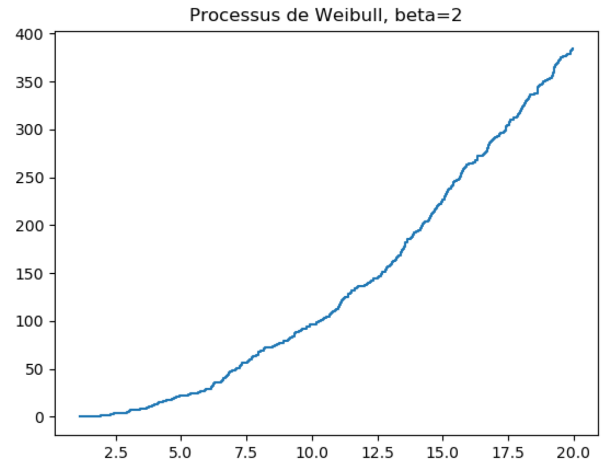
On peut alors montrer que le premier instant de saut $S_1 = \Lambda^{-1}(T_1)$ a pour loi la loi de Weibull de paramètres α et β dont la densité est donnée par

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

De plus si $\beta = 1$ (taux de panne constant autour du temps) on retrouve la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ et donc le processus de Poisson simple. Si $\beta > 1$, le taux de défaillance augmente avec le temps (usure du système) alors que si $\beta < 1$, le taux de défaillance diminue avec le temps (les éléments défectueux qui fragilisent le système tombent en panne rapidement). Les figures suivantes montrent des trajectoires dans les trois cas.







Proposition 3.5. *Supposons l'intensité λ continue au voisinage de t. Alors*

$$\mathbb{P}\left(N_{t+h}-N_t=1\right)=\lambda(t)h+o(h) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(N_{t+h}-N_t \geq 2\right)=o(h).$$

Remarque 3.6. *Afin de pouvoir étendre les résultats sur les temps de sauts des processus de Poisson homogènes, on demande à ce que presque sûrement $S_n=\Lambda^{-1}(T_n)<+\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est assuré dès lors que l'on suppose que $\lim_{t \to +\infty} \Lambda(t)=+\infty$, hypothèse que l'on fera dans toute la suite.*

Proposition 3.7. *Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les temps de sauts d'un processus de Poisson non homogène d'intensité λ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *La loi de $(S_1,\ldots,S_n)$ a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue*

$$(t_1,\ldots,t_n) \mapsto \exp\left(-\int_0^{t_n} \lambda(u)du\right) \prod_{k=1}^{n} \lambda\left(t_k\right) \mathbb{1}_{(0<t_1<\ldots<t_n)}.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}_+^\times$. Alors la loi conditionnelle de $(S_1, \ldots, S_n) \mid (N_t = n)$ a pour densité

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \frac{n!}{\Lambda(t)^n} \prod_{k=1}^{n} \lambda(t_k) \mathbb{1}_{(0<t_1<\ldots<t_n<t)}.$$

Remarque 3.8. *Rappelons que si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires iid de loi à densité f, alors la loi du réarrangement croissant $\left(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ de ces variables admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue*

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto n! \prod_{k=1}^{n} f(y_k) \mathbb{1}_{(0<y_1<\ldots<y_n)}.$$

Ainsi la proposition ci-dessus assure que la loi conditionnelle de $(S_1, \ldots, S_n) \mid (N_t = n)$ est celle du réarrangement croissant d'un n-échantillon de loi à densité $f(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)} \mathbb{1}_{[0,t]}(x)$.

3.2 Estimation paramétrique de la fonction d'intensité

Comme pour le cas du processus de Poisson simple, on peut utiliser la Proposition 3.7 pour calculer la fonction de vraisemblance du modèle lorsque l'on observe une trajectoire sur l'intervalle $[0, t]$. On se place dans un modèle paramétrique où l'intensité du processus appartient à une famille $\{\lambda_\theta \mid \theta \in \Theta\}$. La fonction de vraisemblance s'écrit alors

$$L(t_1, \ldots, t_n, n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_\theta(t_k) \exp(-\Lambda_\theta(t)).$$

On va donner un estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas du processus de Weibull, défini plus haut, caractérisé par les paramètres α et β via

$$\lambda_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ainsi la log-vraisemblance s'écrit

$$\ell(t_1, \ldots, t_n, n; \alpha, \beta) = (\ln(\beta) - \beta \ln(\alpha))n + (\beta - 1) \sum_{k=1}^{n} \ln(t_k) - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta.$$

On en déduit l'estimateur du maximum de vraisemblance

$$\frac{1}{\hat{\beta}} = \ln(t) - \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} \ln(S_k),$$
$$\ln(\hat{\alpha}) = \ln(t) - \frac{1}{\hat{\beta}} \ln(N_t).$$

Il est alors possible de donner des intervalles de confiance non-asymptotique pour le paramètre β, en utilisant une statistique pivotale. En effet, la statistique $\frac{2n\beta}{\hat{\beta}}$ admet comme loi sachant $N_t = n$ une loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté. On peut donc construire différents intervalles de confiance de niveau $1 - \delta$ (conditionnellement à $N_t = n$)) utilisables pour réaliser des tests sur le paramètre β, soit sur l'usure du système :

$$I_n = \left[0, \frac{\hat{\beta}}{2n} q_\delta\right], \quad I_n = \left[\frac{\hat{\beta}}{2n} q_{1-\delta}, +\infty\right[, \quad I_n = \left[\frac{\hat{\beta}}{2n} q_{\frac{1-\delta}{2}}, \frac{\hat{\beta}}{2n} q_{\frac{1+\delta}{2}}\right]$$

où q_δ désigne le δ-quantile de la loi $\chi^2(2n)$.

3.3 Test de Laplace

On cherche maintenant à être en mesure de tester si un processus de Poisson observé sur $[0, t]$ est homogène ou non. On teste alors l'hypothèse nulle (H_0) : "N est un processus de Poisson simple" contre l'hypothèse (H_1) : "N est un processus de Poisson dont l'intensité est non constante et décroît au cours du temps (resp. croît au cours du temps)".

Proposition 3.9. *On rappelle que $\int_0^{+\infty} \lambda(s)ds = +\infty$. Sachant $(N_t = N)$, on introduit la statistique*

$$Y_t = \frac{\sum_{k=1}^{N} S_k - Nt/2}{t\sqrt{N/12}}.$$

Pour tester H_0 contre H_1 "l'intensité est décroissante non constante", notre test est $\mathcal{T} = \mathbf{1}_{(\{Y_t < q_\alpha\})}$ où q_α est le quantile d'ordre α de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
Si l'hypothèse H_1 était "l'intensité est croissante non constante", on aurait choisi le test $\mathcal{T} = \mathbf{1}_{(\{Y_t > q_{1-\alpha}\})}$.

4 Processus de Poisson composé

Définition 4.1. *Soient N un processus de Poisson simple de paramètre λ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une collection de variables aléatoires iid et indépendantes du processus N.*
Le processus $Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k$ définit un processus de Poisson composé sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 4.2. *Lorsque l'on choisit pour X_n des variables déterministes égales à 1, on retrouve $Z_t = N_t$, soit un processus de Poisson simple.*

Exemple 4.3. *Imaginons que le nombre de clients arrivés à un service à l'instant t suive un processus de Poisson N et qu'un client dépense une quantité aléatoire X indépendante des autres clients et du nombre de clients. Alors le montant gagné par le service est un processus de Poisson composé Z.*

En conditionnant par rapport à la valeur de N_t, on peut facilement accéder aux moments des variables Z_t dans le processus de Poisson composé en passant par les fonctions caractéristiques.

Proposition 4.4. *Un processus de Poisson composé $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ a des accroissements stationnaires et indépendants. De plus, sa fonction caractéristique est donnée par $\varphi_{Z(t)} : u \mapsto \exp\{\lambda t(\varphi_X(u) - 1)\}$.*

Corollaire 4.5.
1. *Si X_1 admet un moment d'ordre 1, alors c'est aussi le cas de tous les Z_t et $\mathbb{E}[Z_t] = \lambda t\, \mathbb{E}[X_1]$,*
2. *Si X_1 admet un moment d'ordre 2, alors c'est aussi le cas de tous les Z_t et $Var[Z_t] = \lambda t\, \mathbb{E}[X_1^2]$,*
3. *Si X_1 est centrée réduite, alors on a la convergence en loi $\frac{Z_t}{\sqrt{N_t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.*

5 Amincissement et superposition

5.1 Amincissement d'un processus de Poisson

Définition 5.1. *Considérons un processus de Poisson non homogène N d'intensité $t \mapsto \Lambda(t)$. Soient K un entier naturel et $(p_1, \dots, p_K)$ un vecteur de probabilités tel que chaque événement du processus a une probabilité p_j d'être de type j, pour tout $j \in [\![1; K]\!]$. Supposons en outre que les attributions des types sont indépendantes les unes des autres. Pour chaque $j \in [\![1; K]\!]$, le processus de comptage des événements de type j, $(N_j(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, est appelé amincissement du processus $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$.*

Exemple 5.2. *On suppose que les arrivées des clients dans un magasin suivent un modèle de Poisson et que les clients vont acheter au choix du lieu, du bar ou du flétan indépendemment du nombre de clients et du choix des autres clients. Alors les processus d'arrivées des clients aux différents stands sont des processus de Poisson amincis du processus des arrivées des clients.*

Théorème 5.3. *On se donne un processus de Poisson non homogène N d'intensité λ et pour chaque instant de saut t, on tire aléatoirement son type dans $[\![1; K]\!]$ selon une loi $(P_1(t), \dots, P_K(t))$ indépendante du processus et des types des autres sauts.*
On note $N_j(t)$ le nombre d'événements de type j jusqu'à la date t. Alors $N_1, \dots, N_K$ sont des processus de Poisson non homogènes indépendants d'intensités respectives $\mu_j : t \mapsto \lambda(t) P_j(t)$.

Exemple 5.4 (File d'attente $M/G/\infty$)**.** *On imagine que des clientes arrivent à un service doté d'une infinité de serveurs selon un processus de Poisson simple d'intensité λ. Les durées de services des différentes clientes sont iid de loi de fonction de répartition G. Alors le nombre de clientes $\tilde{N}(t)$ satisfaites jusqu'au temps t est un processus de Poisson non homogène d'intensité $t \mapsto \lambda G(t)$.*

Pour voir cela, on peut fixer $s, t \in \mathbb{R}_+^\times$ et attribuer le type 1 à une cliente si elle repart entre les temps s et $s + t$. Si la cliente est arrivée à l'instant y, elle bénéficie du type 1 avec probabilité

$$P(y) = \begin{cases} G(t+s-y) - G(s-y) & si \quad y < s \\ G(t+s-y) & si \quad s < y < s+t \\ 0 & si \quad y > s+t \end{cases}$$

D'après le théorème 5.3, le nombre de clientes $\tilde{N}(t+s) - \tilde{N}(s)$ reparties entre les dates s et $s+t$ est de loi de Poisson de paramètre $\int_0^{s+t} \lambda P(y) dy = \lambda \int_s^{s+t} G(y) dy$.

Parallèlement à cela, pour des intervalles disjoints de $\mathbb{R}_+$ notés $I_1, \dots, I_K$, si on donne à une cliente le type j lorsqu'elle repart dans l'intervalle I_j, on observe, grâce au théorème 5.3, que les nombres de clientes reparties dans les différents intervalles sont indépendants.
Par conséquent, $\tilde{N}$ satisfait tous les axiomes d'un processus de Poisson non homogène.
On observe également qu'en temps long, $\lambda G(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \lambda$ donc on se rapproche du comportement du simple processus d'arrivée N.

5.2 Superposition de processus de Poisson

Définition 5.5. *Soient $N_1, \ldots, N_K$ des processus de Poisson indépendants les uns des autres d'intensités respectives $t \mapsto \lambda_j(t)$. Pour tout $t \in R_+$, on pose $N(t) = \sum_{j=1}^{K} N_j(t)$. Le processus $(N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est appelé superposition des processus $(N_j)_{j\in[\![1;K]\!]}$.*
Au niveau des processus ponctuels ou des instants de sauts, cela revient à considérer la réunion de tous les événements.

Proposition 5.6. *Dans les conditions de la définition précédente, le processus $(N(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson d'intensité $t \mapsto \sum_{j=1}^{K} m_j(t)$.*

Voyons maintenant ce qu'il se passe pour des processus de Poisson composés.

Définition 5.7. *Soient $Z_1, \ldots, Z_K$ des processus de Poisson composés indépendants tels que pour tout $j \in [\![1;K]\!]$, $Z_j(t) = \sum_{n=1}^{N_j(t)} Y_n^j$. Le processus $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par $Z(t) = Z_1(t) + \ldots + Z_K(t)$, pour $t \in \mathbb{R}_+$, est appelé superposition des processus $(Z_j)_{j\in[\![1;K]\!]}$.*

Proposition 5.8. *La superposition de processus de Poisson composés indépendants donne un nouveau processus de Poisson composé et le processus de Poisson simple sous-jacent N est la superposition des processus $N_1, \ldots, N_K$.*

Exemple 5.9. *Pour illustrer la superposition de processus de Poisson, voici un exemple concret. Si l'on suppose que les processus d'ouverture des tulipes d'une certaine couleur dans un jardin sont des processus de Poisson de même type (tous simples ou tous non homogènes ou encore tous composés) indépendants les uns des autres, alors le processus d'ouverture de toutes les tulipes est un processus de Poisson superposé.*

Références :

[1] Lionel Truquet, Cours de Master 2 Recherche, Statistique des processus (2012).

[2] Sheldon M. Ross, Stochastic processes 2nd Edition (1996).