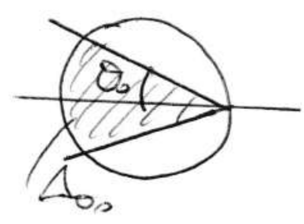
Lem d'Abel et Taubérien faible   Gourdon

Thm radial d'Abel : Si $f(z)=\sum a_n z^n$ a un Rcv ≥ 1 tq $\sum a_n$ cv.
Soit $0\leq \theta_0 < \pi/2$, on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z\in\mathbb{C},\ |z|<1$ et $\exists \rho>0\ \exists\theta\in[-\theta_0,\theta_0],\ z=1-\rho e^{i\theta}\}$
alors $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n$.



Dém : On note $S=\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, $R_n = \sum\limits_{k\geq n+1}^{+\infty} a_k$. Effectuons la transformation d'Abel $a_n = R_{n-1}-R_n$:

$$f(z)-S = \sum_{n\geq 1} a_n(z^n-1) = \sum_{n\geq 1}(R_{n-1}-R_n)(z^n-1) = \sum_{n\geq 0} R_n(z^{n+1}-1) - \sum_{n\geq 0} R_n(z^n-1) \quad \text{car } z^0-1=0$$

$$= \sum_{n\geq 0} R_n(z^{n+1}-z^n) = (z-1)\sum_{n\geq 0} R_n z^n$$

Soit $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}$ tq $|R_n|<\varepsilon\ \forall n\geq N$ (hypo).
Alors $\forall |z|\leq 1$, $|f(z)-S| \leq |z-1|\left|\sum\limits_{n=0}^{N} R_n z^n\right| + |z-1|\left|\sum\limits_{N+1}^{+\infty} R_n z^n\right|$

$$\underset{|z|\leq 1}{\overset{IT}{\leq}} |z-1|\sum_{n=0}^{N}|R_n| + |z-1|\,\varepsilon\sum_{N+1}^{+\infty}|z|^n$$

$$\leq |z-1|\sum_{n=0}^{N}|R_n| + |z-1|\,\varepsilon\,\frac{1}{1-|z|}$$

Et $\exists\alpha>0$ tq $|z-1|<\alpha \Rightarrow |z-1|\sum\limits_0^N |R_n| < \varepsilon$

$$\leq \varepsilon\left(1+\frac{|z-1|}{1-|z|}\right)$$

$$|z|^2 = (1-\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2 = 1-2\rho\cos\theta+\rho^2$$

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{(1+|z|)|z-1|}{1-|z|^2} \leq \frac{2|z-1|}{1-|z|^2} = \frac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2} = \frac{2}{2\cos\theta-\rho} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0-\cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}$$

Ainsi si $z\in\Delta_{\theta_0}$ et $|z-1|<\inf(\alpha,\cos\theta_0)$ on a : $|f(z)-S|\leq \varepsilon\left(1+\frac{2}{\cos\theta_0}\right)$ pour $\rho\leq\cos\theta_0$, $\forall\varepsilon>0$.
Donc $f(z) \xrightarrow[z\to 1,\ z\in\Delta_{\theta_0}]{} S$

□

Applis : séries ln et arctan.

Thm taubérien version faible : si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ a un Rcv ≥ 1 tq $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x) = S$ alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ cv et $\sum_{n \geq 0} a_n = S$. On note $S_N = \sum_0^N a_n$.

Dém : $x \in]0,1[$.

• $S_N - f(x) = \sum_0^N a_n(1-x^n) - \sum_{N+1}^{+\infty} a_n x^n$. On $1 - x^n = (1-x)\underbrace{(1+x+\dots+x^{n-1})}_{\leq n}$

$$|S_N - f(x)| \leq (1-x) \sum_0^N \underbrace{n|a_n|}_{\substack{\leq M \\ \text{majorant}}} + \sum_{N+1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n}{N}}_{(<1)} |a_n| x^n \leq MN(1-x) + \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{n}{N} |a_n| x^n$$

$$\leq MN(1-x) + \sup_{n > N} (n|a_n|) \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{x^n}{N} \leq MN(1-x) + \frac{\sup_{n > N}(n|a_n|)}{N(1-x)}$$

Car $na_n \to 0$ donc $(n|a_n|)_n$ est bornée donc le sup existe.

• pour $x = 1 - \frac{\varepsilon}{N}$ pour $0 < \varepsilon < 1$ quelconque :

$|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})| \leq \varepsilon M + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{n > N} (n|a_n|)$. Et $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\sup_{n > N_0} n|a_n| < \varepsilon^2$

$\leq \varepsilon(M+1)$. car $n|a_n| \to 0$.

• De plus, par hypo $\exists N_1 \geq 0$ $|S - f(1-\frac{\varepsilon}{N})| < \varepsilon$ pour $N \geq N_1$.

Pour $p \geq \max(N_0, N_1)$ on a : $|S - S_N| \leq |S - f(1-\frac{\varepsilon}{N})| + |f(1-\frac{\varepsilon}{N}) - S_N|$

$\leq \varepsilon + \varepsilon(M+1) = \varepsilon(M+2) \quad \forall \varepsilon > 0$.

Donc $S_N \underset{+\infty}{\to} S$.