Espace de Bergman

<u>Ref</u> : Bennis - Bermis,

<u>Théorème</u> : . $B^2(\mathbb{D}) := L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ muni du p.s de L^2 est un Hilbert

. La famille $\left(e_n : z \in \mathbb{D} \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n\right)_n$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.

. $B^2(\mathbb{D})$ admet un noyau reproduisant $K : \begin{cases} \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C} \\ (z,w) \mapsto \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2} \end{cases}$

i.e $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$ $f = \int_{\mathbb{D}} f(w) K(\cdot, w)\, dw$

<u>Lemme</u> : Pour $f \in B^2(\mathbb{D})$ et K compact inclus dans $\mathbb{D}$. Alors

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K, \partial\mathbb{D})} \|f\|_2$$ où $d(K,\partial\mathbb{D})$ est la distance de K au cercle unité (frontière de $\mathbb{D}$).

<u>Démo du Lemme</u> : Soit $a \in K$, $n \geq 0$ tq $0 \leq n < 1-|a|$ tq $\overline{D(a,n)} \subset \mathbb{D}$

D'après la formule de Cauchy, $f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$

En particulier pour $\gamma = \partial B(a,\rho)$ où $0 < \rho \leq n$:

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} \rho e^{i\theta} i\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\, d\theta \quad (*)$$

[formule de la moyenne]

De plus, $\int_{\overline{D(a,n)}} f(z)\,dz = \int_0^n \left(\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\, d\theta \right) \rho\, d\rho$ par changement polaire

$$\overset{(*)}{=} \int_0^n 2\pi f(a) \rho\, d\rho = \pi n^2 f(a)$$

Donc $|\pi n^2 f(a)| = \left| \int_{\overline{D(a,n)}} f(z)\,dz \right| \overset{C-S}{\leq} \|f\|_2 \sqrt{\mathrm{Vol}(B(a,n))} = \|f\|_2 \sqrt{\pi n^2}$

Soit $\sqrt{\pi}\, n |f(a)| \leq \|f\|_2$ pour $n \in [0, 1-|a|]$ soit $\sqrt{\pi}(1-|a|)|f(a)| \leq \|f\|_2$

Or $d(K,\partial D) \leq d(a,\partial D) = 1-|a|$ on obtient alors $\sqrt{\pi}\, d(K,\partial D)|f(a)| \leq \|f\|_2$ $\forall a \in K$.

donc $\max_{z \in K} |f(z)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\pi}\, d(K,\partial D)}$. □

Démonstration du théorème :

(1) Espace de Hilbert : pour $\|\cdot\|_2$

Mq $(B^2(\mathbb{D}), \langle\cdot\rangle_2)$ est complet. Soit (f_n) de Cauchy dans $B^2(\mathbb{D})$.

K compact de $\mathbb{D}$. Par le lemme on a :

$$\max_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K, \partial\mathbb{D})} \|f_n - f_m\|_2 .$$

Donc (f_n) est de Cauchy sur l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ muni de la cvu sur tout compact. D'après le théorème de Weierstrass, f_n converge vers f holomorphe pour cette topologie. En part, f_n cvs vers f.

De plus, (f_n) est de Cauchy de $L^2(\mathbb{D})$ donc converge dans $L^2(\mathbb{D})$ (car complet) et par Riesz-Fisher, $\exists\, \varphi \nearrow$ tq $f_{\varphi(p)} \to g$ p.p.

Ainsi, $f = g$ p.p. et donc $f \in L^2$ (car $g \in L^2$).

CCL : (f_n) cv pour $\|\cdot\|_2$ vers $f \in B^2(\mathbb{D})$.

(2) Base hilbertienne

Mq (e_n) est orthonormée :

$$\int_{\mathbb{D}} z^p \bar{z}^q \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^p r^q e^{ip\theta} e^{-iq\theta} d\theta\right) r\, dr = \int_0^1 r^{p+q+1} \times 2\pi \delta_{pq} \, dr$$

$$= \frac{2\pi}{2p+2} \delta_{p,q} . \text{ Donc } \langle e_p, e_q\rangle = 0 \quad p \neq q .$$

et $\langle e_p, e_p\rangle = \frac{p+1}{\pi} \times \frac{2\pi}{2p+2} = 1$. Donc (e_n) est orthonormée.

Mq (e_n) est totale. Soit $f \in (\mathrm{Vect}\{e_m\})^\perp \cap B^2(\mathbb{D})$.

D'une part, $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ avec $a_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$ $\quad 0 \leq r < 1$

car f est holomorphe sur $\mathbb{D}$. (formule de Cauchy)

Pour $m \in \mathbb{N}$:

$$0 = \langle f, e_m\rangle = \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} \bar{z}^m f(z)\, dz = \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^m e^{-im\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta\right) r\, dr$$

$$= \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \int_0^1 r^m (2\pi r^m a_m)\, r\, dr = 2a_m \sqrt{\pi} \int_0^1 r^{2n+1} dr \sqrt{m+1} \Rightarrow a_m = 0 \quad \forall m$$

Donc $f = 0$. Ainsi, $\mathrm{Vect}\{e_n\}^\perp = \{0\}$ donc (e_n) est totale : c'est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.

3) Noyau reproduisant

D'après le lemme, $l_z : B^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(z)$ est continue.
$(z \in \mathbb{D})$

D'après le théorème de représentation de Riesz, $\exists!\, k_z \in B^2(\mathbb{D})$ tq
$l_z = \langle \cdot, k_z \rangle$. Posons $K : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$, $(z,w) \mapsto \overline{k_z(w)}$

Comme (e_n) est une base hilbertienne :

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad K(z,\cdot) = \sum_{n\geq 0} \langle k_z, e_m \rangle e_m = \sum_{n\geq 0} \underbrace{\langle e_n, k_z \rangle}_{= l_z(e_m)} \overline{e_m} = \sum_{m \geq 0} e_m(z) \overline{e_m}$$

ces séries CV dans $(B^2(\mathbb{D}), \langle . \rangle_2)$ mais aussi d'après le lemme CVU sur tout compact.

On a $K(z,w) = \sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \overline{w}^n = \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 0} (n+1)(z\overline{w})^n$
$\forall (z,w) \in \mathbb{D}^2$

$$= \frac{1}{\pi} \partial_x \sum_{n\geq 0} x^n \Big|_{z\overline{w}} = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} = \frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2}. \quad \square$$