Translatés d'une fonction C^1

Ref : FGN, Algèbre 1 (p 300).

Thm 1 : Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. f est sol d'une équa diff linéaire homogène à coeffs constants ssi les translatés de f engendrent un ev de dim finie

Lm 2 : Soient $f_1, \dots, f_n$ des applis de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a :
$(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ssi $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $(f_i(x_j))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in GL_n$.

Dem du Lm : $\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée, si $f_1, \dots, f_n$ sont liées alors $\forall (x_1, \dots, x_n)$, les colonnes de $(f_i(x_j))$ sont liées donc $\notin GL_n$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $B = (f_1, \dots, f_n)$ est libre alors $F = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ est de dim n.
On pose $e_a : \begin{cases} F \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(a) \end{cases}$. $A = \{e_a,\ a \in \mathbb{R}\}$ est une partie génératrice de F^*.
En effet si $f \in A^\circ$, on a $e_a(f) = 0$ soit $f(a) = 0\ \forall a \in \mathbb{R}$ donc $f = 0$ ie $A^\circ = \{0\}$.
Soit : $\mathrm{Vect}\,A \underset{\text{dim finie}}{=} (\mathrm{Vect}(A^\circ))^\perp = (A^\circ)^\perp = \{0\}^\perp = F^*$.

On peut donc choisir $x_1, \dots, x_n$ tq $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ base de F^*. Posons $M = (f_i(x_j))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$
Mq les lignes $L_1, \dots, L_n$ de M forment une famille libre
Soient λ_i tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$ alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = 0$
ie $e_{x_j}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right) = 0$ et $(e_{x_j})_{1\le j\le n}$ base de F^* donc :
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in (F^*)^\circ = \{0\}$$
donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0 \underset{(f_i)\text{ base}}{\Rightarrow} \lambda_i = 0\ \forall i$. Donc M est inversible. □

Dem du thm : $\boxed{\Rightarrow}$ Soit (E) l'EDO linéaire homogène à coeff constants dont f est sol.
On note p l'ordre de (E). Tous les translatés de f sont des sol de (E) (car (E) est homogène)
Or l'ensemble des sol d'une EDO d'ordre p linéaire forme un ev de dim p.
Ainsi l'ensemble des translatés de f engendre un ev de dim $\le p$, donc de dim finie

Notations : $f_a = \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a+x) \end{matrix}$ translaté de f

$\boxed{\Leftarrow}$ On note F l'ens. des translatés de f. Par hypo, F est de dim finie.
$\dim(F) := n$. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ tq $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est une base de F.
$\underline{\text{Lm}} \Rightarrow \exists (x_1, \dots, x_n)$ tq $M = (f_{a_i}(x_j))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in GL_n$
Puisque $f \in C^1$, $f_{a_i} \in C^1$. Donc tout élément de F est C^1.
Soit $g \in F$. Mq $g' \in F$
On a $\forall a$ $g_a \in F$ car $g_a \in \text{Vect}(f_{a_1+a}, \dots, f_{a_n+a}) \subset F$
Donc $g_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}$. Mq les λ_i sont dérivables.

$$g(a+x_j) = g_a(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}(x_j)$$

ie $\begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix}$ donc puisque $M \in GL_n$: $\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} = {}^tM^{-1} \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix}$

Comme ${}^tM^{-1}$ est indépendante de a, λ_j est CL des $(g_{x_i})_{1\leq i\leq n}$
Donc $\lambda_j \in C^1$. On a $g(a+x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}(x)$

$$\downarrow \partial a$$

$$g'(a+x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(a) f_{a_i}(x)$$

$$\downarrow a = 0$$

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(0) f_{a_i}(x)$$

Donc $g' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(0) f_{a_i} \in F$.

Donc $\forall g \in F$, $g \in C^\infty$ et $\forall k$ $g^{(k)} \in F$. Puisque F est de dim finie, $\exists p \geq 1$
$f^{(p)} \in \text{Vect}(f, f', \dots, f^{(p-1)})$. Donc f est solution d'une ED linéaire homogène à coeffs constants d'ordre p.

$\underline{\text{Rappels}}$: $-(F^*)^\circ = \{0\}$:
$-\text{Vect}A = \text{Vect}(A^\circ)^\perp$