Moments et fonction caractéristique

<u>Thm</u> : X var de fct carac φ.

i) si $\mathbb{E}(|X|^n) < +\infty$ alors $\varphi \in C^n(\mathbb{R})$ et $\varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{itX})$.

En part, $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$

ii) Réciproqument, si n est pair et φ n fois dérivable en 0, alors $\mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$ $\forall k \leq n$

<u>Dem</u> : i) $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itX(\omega)} dP(\omega)$

. $t \mapsto e^{itX(\omega)} \in C^n(\mathbb{R})$ $\forall \omega$. $\omega \mapsto e^{itX(\omega)} \in L^1(P)$ $\forall t$.

. $|\partial_t^n (e^{itX(\omega)})| = |(iX(\omega))^n e^{itX(\omega)}| = |X(\omega)|^n \in L^1(P)$ (hypo)

Donc par régularité sous l'intégrale, $\varphi \in C^n(\mathbb{R})$

et $\varphi^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (iX(\omega))^k e^{itX(\omega)} dP(\omega) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{itX})$, $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$.

ii) Par récurrence.

<u>$n=0$</u> : rien à faire.

<u>$n \Rightarrow n+1$</u> : Soit φ $2(n+1)$ fois dérivable en 0. Par HR, X a un moment d'ordre $2n$

et $\varphi^{(2n)}(t) = i^{2n} \mathbb{E}(X^{2n} e^{itX})$. Et $\varphi^{(2n)}$ est 2 fois dérivable en 0.

Donc a un DL d'ordre 2 : $\varphi^{(2n)}(t) = (-1)^n \mathbb{E}(X^{2n}) + at + bt^2 + o(t^2)$

On a $\dfrac{\varphi^{(2n)}(t) + \varphi^{(2n)}(-t) - 2\varphi^{(2n)}(0)}{t^2} \underset{t \to 0}{=} 2b + o(1)$

soit $\underbrace{(-1)^n \mathbb{E}\left(X^{2n} \dfrac{(e^{itX} + e^{-itX} - 2)}{t^2} \right)}_{\shortparallel} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 2b$

ie $(-1)^n \mathbb{E}\left(\dfrac{2X^{2n}}{t^2} \dfrac{e^{itX} + e^{-itX}}{2} - \dfrac{2X^{2n}}{t^2} \right) = \mathbb{E}\left(2(-1)^n X^{2n} \dfrac{\cos(Xt) - 1}{t^2} \right) = 2(-1)^{n+1} \mathbb{E}\left(\dfrac{1 - \cos(Xt)}{t^2} X^{2n} \right)$

$\downarrow$

$2b$

Soit $\mathbb{E}\left(\dfrac{1 - \cos(Xt)}{t^2} X^{2n} \right) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} (-1)^{n+1} b$

Or $\dfrac{1 - \cos(Xt)}{t^2} = \dfrac{X^2}{2} + o(1)$

Soit (t_p) une suite qui tend vers 0,

Par Fatou, puisque $\dfrac{1-\cos(tX)}{t^2} \geq 0$:

$$\mathbb{E}(|X|^{2(n+1)}) = \mathbb{E}(X^{2(n+1)}) = \mathbb{E}(X^{2n}X^2) = \mathbb{E}\left(X^{2n}\, 2 \lim_p \frac{1-\cos(Xt_p)}{t_p^2}\right)$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \underline{\lim}_p\, 2\mathbb{E}\left(X^{2n} \frac{1-\cos(t_pX)}{t_p^2}\right) = 2 \times (-1)^{n+1} \cdot b$$

$$= (-1)^{n+1} \varphi^{(2(n+1))}(0) < +\infty$$

Rq : Le point ii) est bien spécifique aux moments pairs.
C'est faux sinon ! On peut avoir φ dérivable en 0 et pourtant ne pas avoir de moment d'ordre 1

Ex : La proba $P = \sum_{n \geq 2} \frac{c}{n^2 \ln n}(\delta_n + \delta_{-n})$ (ie $\mathbb{P}(X=k) = \frac{c}{k^2 \ln|k|}$) $\forall k \in \mathbb{Z}$: $|k| \geq 2$

X n'a pas de moment d'ordre 1 (série de Bertrand) mais φ est dérivable en 0 (exo 3.14 Barbe-Ledoux).