131 devs (⚠ erreurs !!) 219 228 229 253 262 266 (239) 235

Cramer - Chernoff

Thm : $\forall \varepsilon > 0$ tq $\mathbb{P}(X_1 \geq \varepsilon) > 0$ $\exists !\, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left[\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \varepsilon)\right] = \ln\left[\mathbb{E}\left(e^{\lambda_0 X_1}\right)\right] - \varepsilon\lambda_0 < 0$
avec (X_i) iid, $\mathbb{E}(X) = 0$, $e^{\lambda X_1} \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $X_1 \neq c \in \mathbb{R}$ ps. $X \sim \mu$.

Dem : Soit $\varepsilon > 0$ tq $\mathbb{P}(X_1 > \varepsilon) > 0$.

① Minimisation : Mq $\exists ! \lambda \geq 0$ minimisant $\ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})) - \varepsilon\lambda$

On pose $\phi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X_1})$ et $\Psi(\lambda) = \ln\left[\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})\right] - \varepsilon\lambda = \ln(\phi) - \varepsilon\lambda$

ϕ est bien définie par hypo et Ψ aussi car $\phi > 0$.

- Mq Ψ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $\lambda \in [-M, M]$ avec $M > 0$ on a :

$|X_1 e^{\lambda X_1}| \leq e^{|X_1|} e^{|\lambda X_1|} = e^{(1+|\lambda|)|X_1|} \leq e^{(1+M)|X_1|} \leq e^{-(1+M)X_1} + e^{(1+M)X_1} \in L^1(\mathbb{R})$

Donc on peut dériver sous l'espérance (cvd) pour ϕ car $\lambda \mapsto e^{\lambda X_1} \in C^1$ sur $[-M, M]$.

$\phi'(\lambda) = \mathbb{E}(X_1 e^{\lambda X_1})$ $\forall \lambda \in [-M, M]$.

De même, $|X_1^2 e^{\lambda X_1}| \leq e^{2|X_1|} e^{|\lambda||X_1|} \leq e^{(M+2)X_1} + e^{-(M+2)X_1} \in L^1(\mathbb{R})$

On dérive sous l'espérance ($\lambda \mapsto X_1 e^{\lambda X_1} \in C^1$). Donc :

$\phi''(\lambda) = \mathbb{E}(X_1^2 e^{\lambda X_1})$ $\forall \lambda \in [-M, M]$ valable $\forall M > 0$ donc sur $\mathbb{R}$.

Donc Ψ est C^2 et : $\Psi'(\lambda) = \frac{\phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)} - \varepsilon$ et $\Psi''(\lambda) = \frac{\phi''(\lambda)\phi(\lambda) - \phi'(\lambda)^2}{\phi(\lambda)^2}$

$\phi''\phi - \phi'^2 = \mathbb{E}(X_1^2 e^{\lambda X_1})\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}) - \mathbb{E}(X_1 e^{\lambda X_1})^2 \geq \mathbb{E}(X_1 e^{\lambda X_1/2} e^{\lambda X_1/2}) - \mathbb{E}(X_1 e^{\lambda X_1})^2 = 0$

Avec égalité ssi $X_1 e^{\lambda X_1/2}$ et $e^{\lambda X_1/2}$ sont positivement liés ie ssi X_1 est constante ps. ce qui est exclu.

d'où $\phi''\phi - \phi'^2 > 0$ donc $\Psi'' > 0$.

- Donc Ψ est strictement convexe, elle admet donc un unique minimum ssi elle admet un point critique ie si $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tq $\Psi'(\lambda_0) = 0$ soit :

$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ $\frac{\mathbb{E}(X_1 e^{\lambda_0 X_1})}{\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X_1})} = \varepsilon$.

Or $\Psi(\lambda) = \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda(X_1-\varepsilon)}))$ et
$$\begin{cases} e^{\lambda(X_1-\varepsilon)} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{ps} (+\infty)\mathbb{1}_{X_1>\varepsilon} + \mathbb{1}_{X_1=\varepsilon} & \text{en croissant, } \geq 0. \\ e^{\lambda(X_1-\varepsilon)} \xrightarrow[\lambda\to-\infty]{ps} (+\infty)\mathbb{1}_{X_1<\varepsilon} + \mathbb{1}_{X_1=\varepsilon} \end{cases}$$

Par Fatou :
$$\mathbb{E}\left(\lim_{n\to+\infty} e^{n(X_1-\varepsilon)}\right) = \mathbb{E}\left((+\infty)\mathbb{1}_{X_1>\varepsilon} + \mathbb{1}_{X_1=\varepsilon}\right) = (+\infty)\underbrace{\mathbb{P}(X_1>\varepsilon)}_{>0} + \mathbb{P}(X_1=\varepsilon) = +\infty \leq \varliminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}(e^{n(X_1-\varepsilon)})$$

Donc $\mathbb{E}(e^{n(X_1-\varepsilon)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

De même, $\mathbb{E}(\underline{\lim}_{n}\, e^{-n(X_1-\varepsilon)}) = \mathbb{E}((+\infty)\, \mathbb{1}_{X_1<\varepsilon}) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1=\varepsilon}) = \mathbb{P}(X_1<\varepsilon)(+\infty) + \mathbb{P}(X_1=\varepsilon)$

$\geq \underbrace{\mathbb{P}(X_1<0)}_{>0}(+\infty) = +\infty$. Car sinon $\mathbb{E}(X_1)$ ne pourrait pas être nul.

$\underline{\lim}_{n}\, \mathbb{E}(e^{-n(X_1-\varepsilon)}) \geq \mathbb{E}(\underline{\lim}_{n}\, e^{-n(X_1-\varepsilon)}) = +\infty$.

Donc $\mathbb{E}(e^{-n(X_1-\varepsilon)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi, Ψ tend vers $+\infty$, en $\pm\infty$.

Donc Ψ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ d'où l'existence et l'unicité de λ_0.

Avec $\dfrac{\mathbb{E}(X_1 e^{\lambda_0 X_1})}{\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X_1})} = \varepsilon$. De plus, $\Psi'(0) = \dfrac{\mathbb{E}(X_1)}{1} - \varepsilon = -\varepsilon < 0$ et Ψ' est $\nearrow$ (convexité) donc $\lambda_0 > 0$.

On a aussi $\Psi(\lambda_0) < \Psi(0) = \ln(1) - 0 = 0$.

(2) Inégalité de concentration

$\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \geq n\varepsilon) = \mathbb{P}(e^{\lambda_0 S_n} \geq e^{n\lambda_0\varepsilon}) \overset{\text{Markov}}{\leq} \dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda_0 S_n})}{e^{n\lambda_0\varepsilon}} \overset{\text{iid}}{=} \dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})^n}{e^{n\lambda_0\varepsilon}}$

$= \left[e^{\ln(\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})) - \lambda_0\varepsilon}\right]^n = e^{\Psi(\lambda_0)n}$.

(3) Changement de mesure

On pose $\tilde{\mu}(dx) = e^{\lambda_0 x}\mu(dx)/\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})$.

Soit $\tilde{X} \sim \tilde{\mu}$ alors $\mathbb{E}(\tilde{X}) = \int_{\mathbb{R}} x\, \tilde{\mu}(dx) = \int_{\mathbb{R}} \dfrac{x e^{\lambda_0 x}}{\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})}\mu(dx) = \dfrac{\mathbb{E}(X e^{\lambda_0 X})}{\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})} = \varepsilon$.

et $\mathbb{E}(|\tilde{X}|) = \mathbb{E}(|X| e^{\lambda_0 X}) / \mathbb{E}(e^{\lambda_0 X}) < +\infty$ par ce qui précède.

(4) Minoration de la lim

Soient $\tilde{X}_n$ iid $\sim \tilde{\mu}$, $\varepsilon' > \varepsilon > 0$. On a :

$\mathbb{P}(\varepsilon' \geq \bar{X}_n \geq \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{n\varepsilon' \geq \sum_{i=1}^n x_i \geq n\varepsilon\}}\, \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n)$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{n\varepsilon' \geq \sum x_i \geq n\varepsilon\}}\, e^{-\lambda_0 x_1} \dots e^{-\lambda_0 x_n}\, \mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})^n\, \tilde{\mu}(dx_1) \dots \tilde{\mu}(dx_n)$

$= \mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})^n\, \mathbb{E}(e^{-\lambda_0 \tilde{S}_n} \mathbb{1}_{\{n\varepsilon' \geq \tilde{S}_n \geq n\varepsilon\}}) \geq \mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})^n\, \mathbb{E}(e^{-\lambda_0 n\varepsilon'} \mathbb{1}_{n\varepsilon' \geq \tilde{S}_n \geq n\varepsilon})$

$= \mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})^n e^{-n\varepsilon'\lambda_0}\, \mathbb{P}(\varepsilon' \geq \frac{\tilde{S}_n}{n} \geq \varepsilon)$

Or les $\tilde{X}_n$ sont iid et ont un moment d'ordre 2.
De plus, $\mathbb{E}(\tilde{X}_n) = \varepsilon$. Ainsi $\sqrt{n}\left(\frac{\tilde{S}_n}{n} - \varepsilon\right) \to \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$

$\mathbb{P}(\varepsilon' - \varepsilon \geq \frac{\tilde{S}_n}{n} - \varepsilon \geq 0) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\tilde{S}_n}{n} - \varepsilon\right) \geq 0\right) - \mathbb{P}\left(\left(\frac{\tilde{S}_n}{n} - \varepsilon\right) \geq (\varepsilon' - \varepsilon)\right)$

Or $\frac{\tilde{S}_n}{n} - \varepsilon \xrightarrow{ps} 0$ donc en loi donc $\mathbb{P}\left(\frac{\tilde{S}_n}{n} - \varepsilon \geq \varepsilon' - \varepsilon\right) \to \mathbb{P}(0 \geq \varepsilon' - \varepsilon) = 0$

Et $\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\tilde{S}_n}{n} - \varepsilon\right) \geq 0\right) \to \mathbb{P}(\mathcal{N} \geq 0) = \frac{1}{2}$ (centrée)

Donc $\mathbb{P}(\varepsilon' \geq \frac{\tilde{S}_n}{n} \geq \varepsilon) \to \frac{1}{2}$.

On obtient alors : $\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(\varepsilon' \geq \tilde{X}_n \geq \varepsilon)) \geq \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})) - \varepsilon' \lambda_0 + \frac{1}{n} \ln\left(\mathbb{P}\left(\varepsilon' \geq \frac{\tilde{S}_n}{n} \geq \varepsilon\right)\right)$

Donc $\underline{\lim}_n \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \varepsilon)) \geq \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X})) - \varepsilon' \lambda_0 \quad \forall \varepsilon' > \varepsilon$ (proba plus grande !)

soit $\underline{\lim} \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \varepsilon)) \geq \psi(\lambda_0)$

D'où pour (2) : (5) Conclusion :

$\psi(\lambda_0) \leq \underline{\lim} \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \varepsilon)) \leq \overline{\lim} \frac{1}{n} \psi(\lambda_0) \times n = \psi(\lambda_0)$.

D'où $\underline{\lim} = \overline{\lim} = \psi(\lambda_0)$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \varepsilon) = \ln \mathbb{E}(e^{\lambda_0 X}) - \varepsilon\lambda_0 < 0$

//.

Ex 1 : Si $\mu = \mathcal{N}(0,1)$ Alors $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\lambda^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\lambda)^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\lambda^2/2}$

Alors $\psi(\lambda) = \lambda^2/2 - \varepsilon\lambda = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + \varepsilon^2) - \frac{\varepsilon^2}{2} = (\lambda - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2/2$ minimal en $\lambda_0 = \varepsilon$ et de valeur $-\varepsilon^2/2$.

Donc $\frac{1}{n} \log(\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \varepsilon)) \to -\varepsilon^2/2 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Ex 2 : Si les (X_i) ne sont pas centrées on applique à $\hat{X}_i = X_i - \mathbb{E}(X_i)$:

$$\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \varepsilon + \mathbb{E}(X))) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln\left(\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X_1}) e^{-\lambda_0 \mathbb{E}(X)}\right) - \varepsilon\lambda_0$$
$$= \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X_1})) - \lambda_0(\varepsilon + \mathbb{E}(X)) \quad \forall \varepsilon > 0$$

ie $\forall \alpha > \mathbb{E}(X)$: $\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq \alpha)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X_1})) - \lambda_0 \alpha$

Appli 4 : $\mu = \mathcal{B}(p)$ $\mathbb{E}(e^{\lambda_0 X}) = 1 - p + p e^{\lambda_0}$ soit $\lambda_0 = \frac{1}{1+\alpha} \ln\left(\frac{(1-p)\alpha}{-p(1-\alpha)}\right) = \frac{\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)}{\alpha + 1}$ $(p = \frac{1}{2})$