Sous groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ - Markov Kakutani

Alessandrini

Théorème 1 : (Markov-Kakutani)

Soit V un $\mathbb{R}$ ev de dim finie, K convexe compact non vide de V.
G ss grpe compact de $GL(V)$ tq $\forall u \in G$ $u(K) \subset K$. (G stabilise K)
Alors $\exists x \in K$ $\forall u \in G$ $u(x) = x$.

Dem : • Soit N une norme euclidienne sur V.
On pose $v(x) = \max_{u \in G} N(u(x))$ pour $x \in V$. Mq v est une norme G-invariante sur V.

• v est bien définie car $\{u(x), u \in G\}$ est compact puisque G est compact.

• G-invariante : $v(h(x)) = \max_{u \in G} N(u(h(x))) = \max_{u' \in G} N(u'(x)) = v(x)$.
$(h \in G)$ $(u' = uh$ bij$)$

• $v(x) = 0 \Rightarrow N(u(x)) = 0 \quad \forall u \in G$
$\Rightarrow u(x) = 0 \quad \forall u \in G$
$\overset{u = id}{\Rightarrow} x = 0$.

• homogénéité : $v(\lambda x) = |\lambda| v(x)$ car les éléments de G sont linéaires.
$(\lambda \in \mathbb{R})$

• IT : $v(x+y) = N(u_0(x+y))$, $u_0 \in G$
$v(x+y) \leq N(u_0(x)) + N(u_0(y)) \leq v(x) + v(y)$.
Avec égalité ssi $u_0(x)$ et $u_0(y)$ sont positivement liés donc x et y aussi ($u \in GL(V)$)
Donc v est une norme G invariante sur V donc aussi continue.

• Puisque $v \in C^0(K)$, $\exists a \in K$ tq $v(a) = \min_{x \in K} v(x)$.
Pour $u \in G$ on a $u(a) \in K$ (hypo) et vérifie $v(u(a)) = v(a)$.
Soit $y \in K$ tq $v(y) = v(a) \geq 0$. Alors $v(y) = v(a) \underset{\uparrow}{\leq} v\left(\frac{y+a}{2}\right)$
donc $v(y) + v(a) \leq v(y+a)$
$v(a)$ min et $\frac{y+a}{2} \in K$ (convexe)
Donc $\exists \lambda \geq 0$ tq $y = \lambda a$. $\Rightarrow v(y) = |\lambda| v(a) \Rightarrow |\lambda| = 1 \underset{\lambda \geq 0}{\Rightarrow} \lambda = 1$. Donc $y = a$.
(unicité)
On a $y = u(a) \in K$ donc $a = u(a)$ par unicité. $\overset{v(a)}{\parallel}$

Application : Soit G un ss groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors G est conjugué à un ss groupe de $O_n(\mathbb{R})$ et $G \subset O(q)$.

Dem : $E = S_n(\mathbb{R})$. Soit $\rho : G \to GL(E)$ tq $\rho(A) : S \mapsto {}^tASA$

- ρ est bien définie car $A \in G < GL_n(\mathbb{R})$
- ρ est un morphisme de groupes
- ρ est C^0 car $\rho = b \circ \Delta$ avec $b : M_n(\mathbb{R})^2 \to GL(E)$, $(A,B) \mapsto (S \mapsto {}^tASB)$

et $\Delta : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}^2)$

$A \mapsto (A,A)$

b cont car bilin en dim finie, Δ lin en dim finie.

Donc $\rho(G)$ est un ss grp (car ρ morph de grp et G grp) et est compact (ρ cont et G compact) de $GL(E)$.

- On pose $H = \{{}^tMM, M \in G\}$ et $K = \mathrm{Conv}(H)$

G est compact donc H aussi donc K aussi d'après le Lem (Carathéodory)

- De plus, puisque $G \subset GL_n(\mathbb{R})$, $H \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ car ${}^tX{}^tMMX = \|MX\|^2 > 0$ pour $X \neq 0$.

Et S_n^{++} est convexe donc $K \subset S_n^{++}$.

- Mq $\rho(A)(K) \subset K$ $\forall A \in G$:

$\rho(A)({}^tMM) = {}^tA{}^tMMA = {}^t(MA)MA \in H \subset K$ donc par linéarité de $\rho(A)$, K est stable par $\rho(A)$.

- Par Markov Kakutani, $\exists S \in K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\forall A \in G$ $\rho(A)(S) = S$ ie ${}^tASA = S$ $\forall A \in G$

ie $G \subset O(q)$ où q est la f.q associée à $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ($q : x \mapsto {}^txSx$)

Enfin, $\exists ! R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $S = R^2$. Donc $\forall A \in G$ ${}^tAR^2A = R^2$ donc

$(R^{-1}{}^tAR)(RAR^{-1}) = I_n$ ie ${}^t(RAR^{-1})(RAR^{-1}) = I_n$ donc $RAR^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

soit $G \subset R^{-1}O_n(\mathbb{R})R$.

☐

Thm (Carathéodory) : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dim finie, d'ev E et $A \subset \mathcal{E}$, $A \neq \emptyset$.
Tout élément de $\mathrm{Conv}(A)$ s'écrit comme une combinaison convexe de k points de A avec $k \leq 1 + \dim \mathcal{E}$.

Dém : Soit $M \in \mathrm{Conv}(A)$. Alors $M = \sum_{i=1}^{k} t_i A_i$, $A_i \in A$, $\sum t_i = 1$, $0 \leq t_i \leq 1$

On suppose $k > 1 + \dim(\mathcal{E})$, sinon c'est ok.

La famille $(\vec{A_1A_2}, \dots, \vec{A_1A_k})$ est liée car elle possède au moins $(1+\dim E)$ vecteurs de E

Donc $\exists \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tous nuls tq $\lambda_2 \vec{A_1A_2} + \dots + \lambda_k \vec{A_1A_k} = \vec{0}$

On pose $\mu_1 = \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ et $\mu_i = -\lambda_i$, $2 \leq i \leq k$

On a alors $\mu_1 \vec{OA_1} + \dots + \mu_k \vec{OA_k} = \vec{0}$ où O est quelconque dans $\mathcal{E}$ fixé.

Or $\mu_1 + \dots + \mu_k = 0$ et (μ_i) sont non tous nuls : $\exists j \in [\![1,k]\!]$, $\mu_j > 0$.

On pose $\lambda = \min\left\{\frac{t_i}{\mu_i}, \mu_i > 0\right\}$ et $v_i = t_i - \lambda \mu_i \geq 0$.

Or $\sum v_i = \sum t_i - \lambda \sum \mu_i = 1 - \lambda 0 = 1$

Aussi $\exists q \in [\![1,k]\!]$ tq $\lambda = \frac{t_q}{\mu_q}$ d'où $v_q = 0$.

Donc $\vec{OM} = \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{OA_i} = \sum_{i=1}^{k} v_i \vec{OA_i} + \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \mu_i \vec{OA_i}}_{=\vec{0}} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{k} v_i \vec{OA_i}$

Donc $M = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{k} v_i A_i$ donc M est combinaison convexe de $(k-1)$ points de A.
En itérant, M peut s'écrire combinaison convexe d'au plus $(1 + \dim \mathcal{E})$ points. $\square$

Corollaire : A compact $\Rightarrow$ $\mathrm{Conv}(A)$ compact.

Dém : On pose $n = \dim(\mathcal{E})$ et $K = \{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}, t_1 + \dots + t_{n+1} = 1\}$

K est compact. On pose $f : K \times \mathcal{E}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{E}$, $(t_1, \dots, t_{n+1}, A_1, \dots, A_{n+1}) \mapsto t_1 A_1 + \dots + t_{n+1} A_{n+1}$

Par Carathéodory, $f(K \times A^{n+1}) = \mathrm{Conv}(A)$. Or $f \in C^0$ et $K \times A^{n+1}$ est compact donc $\mathrm{Conv}(A)$ est compact. $\square$