235, 236, 239, 245, 265, 267 Formule des compléments :

Ref : Complex Analysis, Stein, Shakarchi

Théorème : $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{v^{z-1}}{v+1}\,dv = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

où $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$.

Démonstration : ① Γ est holomorphe sur $\{z, \mathrm{Re}\, z > 0\} = P$

. $z \mapsto t^{z-1}e^{-t} = e^{(z-1)\ln t}e^{-t}$ est holomorphe sur P. $\forall t > 0$.

. $t \mapsto t^{z-1}e^{-t} = e^{(z-1)\ln t}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\mathrm{Re}(z-1) > -1$ ok car $z \in P$

. Soit K compact de P tq $\mathrm{Re}(z) \in [\varepsilon, M]$, $\varepsilon > 0$:

$$|e^{(z-1)\ln t}e^{-t}| \leq e^{(\varepsilon-1)\ln t}e^{-t} \leq e^{(\varepsilon-1)\ln t} = \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} \text{ intégrable au voisinage de } 0 \quad (0 < t \leq 1)$$

$$\leq t^{M-1}e^{-t} \text{ intégrable sur } [1, +\infty[. \quad (t \geq 1)$$

Donc Γ est holomorphe sur P.

② Réduction du problème

Les deux membres de la formule sont holomorphes sur l'ouvert connexe $\{z, 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$

Si on montre la formule sur $s \in]0,1[$ alors les fonctions coïncident sur $]0,1[$ qui possède un point d'accumulation, le théorème de prolongement analytique étend le résultat à $\{z, 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$.

③ 1ère partie de l'égalité

$(0 < s < 1)$.

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx \int_0^{+\infty} y^{-s}e^{-y}\,dy \underset{\text{Tonelli}}{\overset{\text{Fubini}}{=}} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{s-1}y^{-s}e^{-(x+y)}\,dx\,dy$$

$\varphi : (x,y) \mapsto (x+y, \frac{x}{y})$ est un C^1 difféo $\begin{cases} u = x+y \\ v = x/y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = (v+1)y \\ x = vy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uv/(v+1) \\ y = \frac{u}{v+1} \end{cases} \in C^1(]0,+\infty[^2)$

$]0,+\infty[^2 \to]0,+\infty[^2$

$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/y & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$, $|\det D\varphi(x,y)| = \left|-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}\right| = \frac{x+y}{y^2}$

On a par la formule du changement de variable : $u = x+y$, $v = x/y$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_{\mathbb{R}_+^{*2}} \left(\frac{x}{y}\right)^s \times \frac{e^{-(x+y)}}{x}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_+^2} v^s e^{-u} \frac{(v+1)}{uv} \frac{du\,dv}{|\mathrm{Jac}|_{u,v}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} v^{s-1} e^{-u} \frac{v+1}{u} \times \frac{1}{u} \times \frac{u^2}{(v+1)^2}\,du\,dv = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{v^{s-1}e^{-u}}{v+1}\,du\,dv$$

$$\underset{\text{Tonelli}}{\overset{\text{Fubini}}{=}} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u}\,du \int_{\mathbb{R}_+}\frac{v^{s-1}}{v+1}\,dv = \int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{v^s}{v+1}\frac{dv}{v} \underset{\substack{x=\ln v \\ \frac{dx}{dv}=\frac{1}{v}}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{xs}}{e^x+1}\,dx$$

(

<u>Autre méthode :</u>

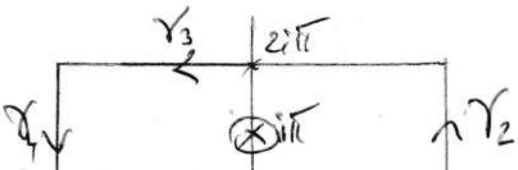
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx \int_0^{+\infty} y^{-s}e^{-y}\,dy \underset{\substack{\text{Fubini}\\ \text{Tonelli}}}{=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} y^{-s}e^{-y}\,dy\right) x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

$$\overset{y=vx}{=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} (vx)^{-s}e^{-vx}\,x\,dv\right)x^{s-1}e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} v^{-s}e^{-vx}\,dv\right)e^{-x}\,dx$$

$$\underset{\text{Tonelli}}{\overset{\text{Fubini}}{=}} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-vx}e^{-x}\,dx\right)v^{-s}\,dv = \int_0^{+\infty}\frac{dv}{v^s(v+1)}.$$ Or $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ est invariante par $s \leftrightarrow 1-s$ donc $= \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{v^{s-1}}{v+1}\,dv \underset{\substack{x=\ln v\\ dx=\frac{dv}{v}}}{=} \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{xs}}{e^x+1}\,dx$

(4) Théorème des résidus

On pose $f(z) = \dfrac{e^{zs}}{e^z+1}$ méromorphe, de pôles $z = (2k+1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



On considère le chemin :
$\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \sqcup \gamma_3 \sqcup \gamma_4$.
lacet.

Le théorème des résidus donne : $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \,\mathrm{Res}_f(i\pi) = 2i\pi \lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)f(z)$

$$= 2i\pi\, e^{i\pi s}\lim_{z\to i\pi}\frac{z-i\pi}{e^z-e^{i\pi}} = \frac{2i\pi\, e^{i\pi s}}{e^{i\pi}}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -2i\pi\, e^{i\pi s}.$$

(5) Découpage des chemins

$\cdot \left|\int_{\gamma_2} f\right| \underset{z=R+it}{=} \left|\int_0^{2\pi} f(R+it)\, i\, dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{sR}e^{sit}}{e^{R+it}+1}\, dt\right| \leq \frac{2\pi e^{sR}}{e^R-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

car $|e^{R+it}+1| \geq ||e^{R+it}|-1| = |e^R-1|$

$\cdot \left|\int_{\gamma_4} f\right| = \left|\int_0^{2\pi} f(-R+it)\, dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{-sR}e^{sit}}{e^{-R+it}+1}\, dt\right| \leq \frac{2\pi e^{-sR}}{1-e^{-R}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\cdot \int_{\gamma_3} f = -\int_{-R}^{R} f(t+2i\pi)\, dt = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{ts}e^{2i\pi s}}{e^{t+2i\pi}+1}\, dt = -e^{2i\pi s}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ts}}{e^t+1}\, dt$

$\cdot \int_{\gamma_1} f = \int_{-R}^{R} f(t)\, dt. \qquad = -e^{2i\pi s}\int_{-R}^{R} f(t)\, dt$

Ainsi, $\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_3} f = (1-e^{2i\pi s})\int_{-R}^{R} f(t)\, dt \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} (1-e^{2i\pi s})\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt$

Ainsi, à la limite $[R\to+\infty]$, $\int_\gamma f = (1-e^{2i\pi s})\int_{\mathbb{R}} f = -2i\pi e^{i\pi s}$

soit $\int_{\mathbb{R}} f = \frac{-2i\pi e^{i\pi s}}{1-e^{2i\pi s}} = \frac{-2i\pi}{e^{-i\pi s}-e^{i\pi s}} = \frac{\pi}{\sin(s\pi)}$. Le point (2) conclut.

$\cancel{\square}$

<u>Corollaire</u> : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

<u>Démonstration</u> : $s=\frac{1}{2}$: $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi \overset{\Gamma\geq 0}{\Rightarrow} \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt \underset{u=\sqrt{t}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$.

$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

<u>Corollaire</u> : Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

<u>Démonstration</u> : On a $\forall s\in\mathbb{C}, 0<\mathrm{Re}(s)<1$ $\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)\sin(\pi s)} \neq 0$

Le membre de droite est holomorphe sur $\{z, \mathrm{Re}(z)<1, -z\notin\mathbb{N}\}$ ouvert connexe.
Il y a égalité sur $\{z\in\mathbb{C}, 0<\mathrm{Re}\, z<1\}$ qui possède un point d'accumulation.
d'où le prolongement holomorphe sur $\{z, \mathrm{Re}\, z<1, -z\notin\mathbb{N}\}$. De plus Γ est holomorphe sur $\{z, \mathrm{Re}\, z>0\}$. Finalement, Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Rq : les pôles de Γ sont simples, ils sont en $\mathbb{Z}^-$, de résidu $(-1)^n/n!$

Démonstration : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$

$$[z-(-n)]\Gamma(z) = (z+n)\Gamma(z) = \frac{(z+n)\,\pi}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)}.$$

Or $\dfrac{\sin \pi z - \overbrace{\sin(-\pi n)}^{=0}}{z-(-n)} \xrightarrow[z\to -n]{} \pi\cos(\pi z)\big|_{z=-n} = \pi\cos(\pi n) = (-1)^n\pi$.

$$(z-(-n))\Gamma(z) \xrightarrow[z\to -n]{} \frac{\pi}{\Gamma(1+n)} \times \frac{1}{(-1)^n\pi} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Ainsi, $\Gamma(z) - \sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ $=: h$

On peut montrer sur $\{z, \operatorname{Re} z > 0\}$ que $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt = \sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ en DSE exp + Fubini. Donc sur $\{z, \operatorname{Re} z>0\}$ $h(z) = \Gamma(z) - \sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)} = \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$

Le membre de droite étant bien holomorphe, le théorème d'égalité fournit que $h(z) = \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$.

Ainsi $\Gamma(z) = \sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ formule du prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$.
$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$

Autre application de la formule des compléments : Calcul de $\int_0^1 \log(\Gamma(x))\,dx$
$\left[\text{via } \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2)\right]$. $\quad (= \ln(2\pi)/2)$