223, 224, 226, 230

Jérémy Bettinger

Développement asymptotique de suites définies par récurrence

40 Dev. Analyse pour l'agrég. Bernis

Thm 1 Soit $b > 0$, $f : [0,b] \to \mathbb{R}$. On suppose

i) $f \in C^0$ iii) $\forall x \in]0,b]$ $f(x) < x$ et $f(0) = 0$

ii) $f \nearrow$ iv) $\exists \lambda > 0, k > 1$ tq $f(x) = x - \lambda x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^k)$

si $c \in]0,b[$ $\begin{cases} u_0 = c \\ f(u_n) = u_{n+1} \end{cases}$ alors (u_n) est à valeurs dans $]0,b[$

de limite 0 et $u_n \underset{+\infty}{\sim} K / n^{\frac{1}{k-1}}$ avec $K = (\lambda(k-1))^{1/1-k}$

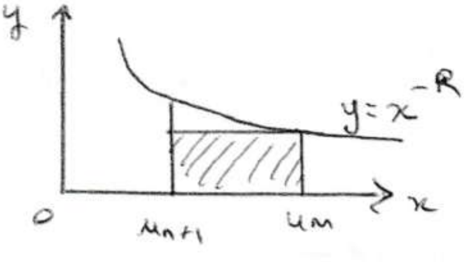
Rq : iv) $\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ ie $u_{n+1} \sim u_n$.

Démo : 1^{er} pas : Convergence et limite

Si on avait $f(y) = 0$ alors f serait nulle sur $[0,y]$ par croissance de f.
Impossible d'après iv). $(0 < y < b)$ Donc : $\forall x \in]0,b[$ $0 < f(x) < x < b$
ainsi f laisse $]0,b[$ stable ie (u_n) est bien définie.
D'après iii) $(u_n) \searrow$ et est ≥ 0 donc converge vers $l \in [0,b]$ point fixe de f. D'après iii) seul $l = 0$ est possible par C^0 de f.

Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$2^{ème}$ pas : Heuristique



D'après iv) $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\lambda$

$= \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^k}$.

La figure suggère $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^k} \underset{+\infty}{\sim} \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dt}{t^k} = \left[t^{1-k}/1-k \right]_{u_{n+1}}^{u_n} = \frac{u_n^{1-k} - u_{n+1}^{1-k}}{1-k}$

$3^{\text{ème}}$ pas : Vérifions

$$\frac{u_n^{1-R}-u_{n+1}^{1-R}}{1-R} = \frac{1}{1-R}\left(u_n^{1-R} - \left(u_n - \lambda u_n^R + o(u_n^R)\right)^{1-R}\right)$$

$$= \frac{u_n^{1-R}}{1-R}\left(1-\left(1-\underbrace{\lambda u_n^{R-1}}_{\to 0\ (R>1)} + o(u_n^{R-1})\right)^{1-R}\right)$$

$$= \frac{u_n^{1-R}}{1-R}\left(1-\left(1-(1-R)\lambda u_n^{R-1} + O(u_n^{R-1}\right)\right)$$

$$= \lambda + o(1) \sim \lambda$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda = +\infty$, par sommation des équivalents :

$$\sum_{k\leq n-1} \frac{u_k^{1-R}-u_{k+1}^{1-R}}{1-R} \sim \sum_{k\leq n-1} \lambda = n\lambda \text{ . ie } \frac{u_0^{1-R}-u_n^{1-R}}{1-R} \sim n\lambda$$

Soit $u_n^{1-R} \sim (R-1)n\lambda$ puis $u_n \sim \left((R-1)n\lambda\right)^{1/(1-R)} = \frac{K}{n^{1/(R-1)}}$

avec $K = \left[(R-1)\lambda\right]^{1/(1-R)}$ $\square$

<u>Prop 2</u> : En particulier pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$ on a le dev. asympt :

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

<u>Dem</u> : f vérifie i), ii), iii) et pour iv) $\lambda = \frac{1}{2}$, $R = 2$

Le théorème 1 fournit $u_n \sim 2/n$. On va plus loin dans le DL précédent.

$$\frac{u_n^{-1}-u_{n+1}^{-1}}{-1} = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} = u_n^{-1}\left(\frac{u_{n+1}^{-1}}{u_n^{-1}} - 1\right) = u_n^{-1}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$$

$$= u_n^{-1}\left(\frac{u_n}{\ln(1+u_n)} - 1\right) = u_n^{-1}\left(\frac{1}{1-u_n/2 + u_n^2/3 + o(u_n)^2} - 1\right)$$

$$= u_n^{-1}\left(1 + \left(u_n/2 - u_n^2/3 + o(u_n^2)\right) + \left(\frac{u_n}{2} - u_n^2/3 + o(u_n^2)\right)^2 + o(u_n^2) - 1\right)$$

$$= u_n^{-1}\left(\frac{u_n}{2} - u_n^2/3 + \frac{u_n^2}{4} + o(u_n^2)\right) = \frac{1}{2} - \frac{u_n}{12} + o(u_n)$$

En posant $x_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2}$ on a $x_n \sim -\frac{u_n}{12} \sim \frac{-1}{6n}$.

Et comme $\sum \frac{1}{6n} = +\infty$, on a $\sum\limits_{k\leq n-1} x_k \sim \sum\limits_{k\leq n-1} \frac{-1}{6k} \sim \frac{-1}{6}\ln(n)$

Or $\sum\limits_{k\leq n-1} x_k = \sum\limits_{k\leq n-1}\left(u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1} - \frac{1}{2}\right) = u_n^{-1} - u_0^{-1} - \frac{n}{2}$

soit $u_n^{-1} - \frac{n}{2} = -\frac{1}{6}\ln(n) + o(\ln n)$

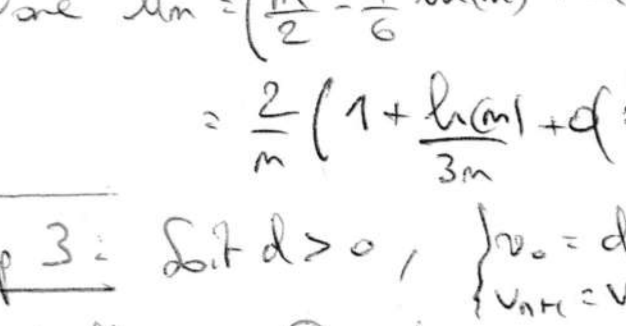
Donc $u_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln(n) + o(\ln n)\right)^{-1} = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-1}$

$= \frac{2}{n}\left(1 + \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ □

Prop 3 : Soit $\alpha > 0$, $\begin{cases} v_0 = \alpha \\ v_{n+1} = v_n + \exp(-v_n^2) \end{cases}$ définit une suite qui diverge. De plus, $v_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\ln n}$.

Dém : $g : x \mapsto x + \exp(-x^2)$ stabilise $\mathbb{R}_+$

De plus, (v_n) est strict. $\nearrow$ donc cv vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \geq 0$ et tq $g(l) = l$ ie $\exp(-l^2) = 0 \Rightarrow l = +\infty$. Donc $v_n \to +\infty$.



Comme précédemment, on déduit $1 = (v_{n+1} - v_n)\exp(v_n^2) \underset{+\infty}{\sim} \int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2}\,dt$

Cherchons un équivalent de cette intégrale

$$\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2}\,dt = \int_{v_n}^{v_{n+1}} 2t\,e^{t^2} \times \frac{1}{2t}\,dt = \left[e^{t^2}/2t\right]_{v_n}^{v_{n+1}} + \int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2}/2t^2\,dt$$

Or $\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2}/2t^2\,dt = o\left(\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2}\,dt\right)$. En effet :

$$\frac{\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2}/2t^2\,dt}{\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2}\,dt} \leq \frac{e^{v_{n+1}^2}/2v_n^2\,(v_{n+1}-v_n)}{e^{v_n^2}(v_{n+1}-v_n)} = \frac{e^{v_{n+1}^2 - v_n^2}}{2v_n^2} = \frac{e^{(v_{n+1}+v_n)e^{-v_n^2}}}{2v_n^2} = \frac{e^{\overbrace{\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}+1\right)}^{\to 2}\underbrace{e^{-v_n^2}v_n}_{\to 0}}}{2v_n^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où $\int_{v_n}^{v_{n+1}} e^{t^2}\,dt \sim \frac{e^{v_{n+1}^2}}{2v_{n+1}} - \frac{e^{v_n^2}}{2v_n}$,

$$\frac{e^{v_{n+1}^2}}{2v_{n+1}} - \frac{e^{v_n^2}}{2v_n} = \frac{e^{v_n^2}}{2v_n}\left(e^{v_{n+1}^2 - v_n^2}\,\frac{v_m}{v_{n+1}} - 1\right)$$

$$= \frac{e^{v_n^2}}{2v_n}\left[\exp\left(2\exp(-v_n^2)v_m + \exp(-2v_n^2)\right)\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^{-1} - 1\right]$$

$$= \frac{e^{v_n^2}}{2v_n}\left(\left[1 + 2\exp(-v_n^2)v_n + o(v_m\exp(-v_n^2))\right]\left(1+\frac{e^{-v_n^2}}{v_m}\right)^{-1} - 1\right)$$

$$= \frac{e^{v_n^2}}{2v_n}\left(\left(1 + 2e^{-v_n^2}v_n + o(v_n e^{-v_n^2})\right)\left(1 + o(v_m e^{-v_n^2})\right) - 1\right)$$

$$= \frac{e^{v_n^2}}{2v_n}\left(1 + 2e^{-v_n^2}v_m + o(v_m e^{-v_n^2}) - 1\right) = 1 + o(1).$$

Et $\sum 1 = +\infty$ donc $\sum_{k\leq m-1}\left(\frac{e^{v_{k+1}^2}}{2v_{k+1}} - \frac{e^{v_k^2}}{2v_k}\right) \sim \sum_{k\leq n-1} 1 = m.$

soit $\frac{e^{v_m^2}}{2v_m} - \frac{e^{v_0^2}}{2v_0} \sim m$ soit $e^{v_m^2} \sim 2mv_m$.

$\log(2mv_m) = \log(2) + \log(m) + \log(v_n)$. (1)

Or $\log(2mv_m) = \log\left(e^{v_n^2} + o(e^{v_n^2})\right) = \log(e^{v_n^2}) + \log(1+o(1))$

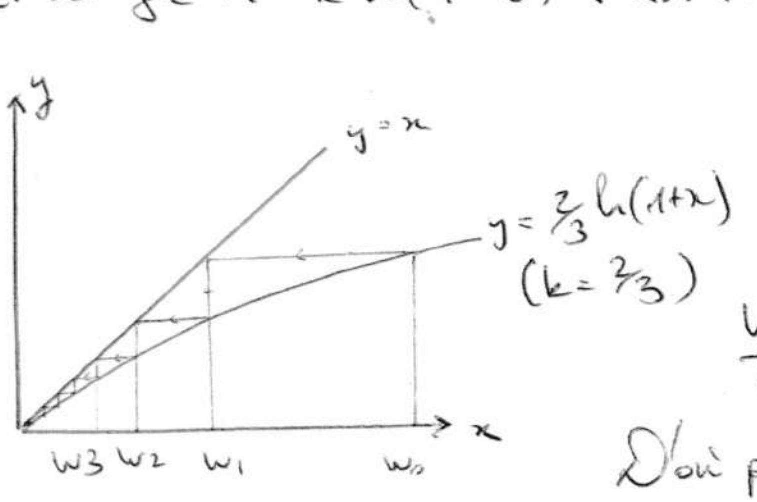
$= v_m^2 + o(1)$. (2)

De plus, $\begin{cases} \log(v_m) = o(v_m^2) \\ \log(2) = o(v_n^2) \end{cases}$ donc (1) et (2) donnent :

$\log(m) + o(v_n^2) = v_m^2$ ie $v_m^2 \sim \log m$ soit $v_m \sim \sqrt{\ln m}$. $\square$

Prop 4 : Peut-on trouver une suite définie par une relation de récurrence qui converge vers 0 géométriquement ? Oui. Cherchons-là à l'aide de la relation : $\begin{cases} w_0 = c \\ w_{n+1} = k\ln(1+w_n) \end{cases}$ pour $c>0$, $k \in]0,1[$

Démonstration : La suite (w_n) est ≥ 0 ↘ donc converge vers $l \geq 0$.
Et vérifie $l = k\ln(1+l) < kl < l$ si $l \neq 0$, donc $l = 0$.



Convergence plus rapide...
Vérifions.

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{k\ln(1+w_n)}{w_n} \xrightarrow[+\infty]{} k.$$

D'où par C^0 du log, $\ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) \to \ln(k)$

soit $\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n) \sim \ln(k)$ et $\sum 1 \ln k = \infty$

donc par sommation des $\sim$: $\sum_{i \leq n-1} \ln(w_{i+1}) - \ln(w_i) \sim \sum_{i \leq n-1} \ln k = n\ln k$

soit $\ln(w_n) - \ln(w_0) \sim n\ln k$ i.e. $\ln w_n \sim n\ln k$

et alors $\frac{1}{n}\ln(w_n) = \ln\left(w_n^{1/n}\right) \to \ln k$.

Par C^0 de exp : $w_n^{1/n} \to k$.

$$\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n) = \ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \ln\left(\frac{k\ln(1+w_n)}{w_n}\right) = \ln(k) + \ln\left(\frac{\ln(1+w_n)}{w_n}\right)$$
$$= \ln k + \ln\left(\frac{w_n - w_n^2/2 + o(w_n^2)}{w_n}\right) = \ln k + \ln\left(1 - \frac{w_n}{2} + o(w_n)\right)$$
$$= \ln k - \frac{w_n}{2} + o(w_n).$$

On pose $z_n = \ln(w_{n+1}) - \ln(w_n) - \ln k$. Alors $z_n \sim -\frac{w_n}{2}$.

Or $\frac{w_{n+1}}{w_n} \to k < 1$ donc d'après la règle de d'Alembert la série $\sum w_n$ CV.

Donc par comparaison $\sum z_n < +\infty$. On note S sa somme.

Ainsi $\ln(w_n) - \ln(c) = \sum_{i \leq n-1} \ln(w_{i+1}) - \ln(w_i) = \sum_{i \leq n-1} z_i + n\ln k = S + n\ln k + o(1)$

Donc $\frac{w_n}{c} = \exp(S + n\ln k + o(1)) = e^{S+o(1)} k^n = e^S k^n e^{o(1)} = e^S k^n (1 + o(1))$

soit $\frac{w_n}{c} = e^S k^n + o(k^n)$ i.e. $w_n \sim c e^S k^n = A k^n$ avec $A = ce^S$.

Donc (w_n) CV géométriquement donc mieux que la CV du thm 1.