Bettinger
Jérémy

Intégrale de Dirichlet

235, 236, 239, 245,
250, 265

Bernis,
Candelpergher

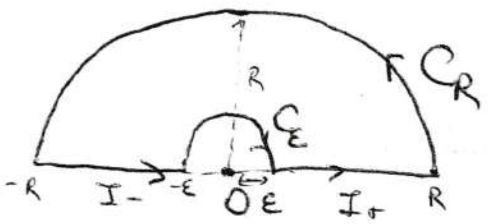
<u>Thm</u> : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi/2$ mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$

En particulier pour $x \gg 1$, $\displaystyle\int_0^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{2}{\pi}\ln(x)$.

<u>Rq</u> : Se généralise à f C^0, π-périodique et paire.
(Lobachevski) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

<u>Preuve 1</u> (Analyse complexe)

On considère le chemin fermé γ



$f(z) = \exp(iz)/z \quad (z \in \mathbb{C}^*)$

$\gamma = C_\varepsilon \sqcup I_+ \sqcup C_R \sqcup I_-$ $\qquad 0 < \varepsilon < 1$

Par la formule de Cauchy, $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})\, Rie^{i\theta}\,d\theta\right| = \left|\int_0^\pi \exp(Rie^{i\theta})\,d\theta\right|$$

$$\leq \int_0^\pi \exp(-R\sin\theta)\,d\theta.$$ De plus, $|\exp(-R\sin\theta)| \leq 1 \in L^1(0,\pi)$ $\forall \theta \in [0,\pi]$.

Par convergence dominée, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$ car $\exp(-R\sin\theta) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Et de même avec C_ε (paramétrer dans le sens indirect) :

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = -\int_0^\pi f(\varepsilon e^{i\theta})\,\varepsilon i e^{i\theta}\,d\theta = -i\int_0^\pi \exp(\varepsilon i e^{i\theta})\,d\theta$$

$|\exp(\varepsilon i e^{i\theta})| \leq \exp \varepsilon \leq e \in L^1(0,\pi)$. Et $\exp(\varepsilon i e^{i\theta}) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = -i\pi$

Ainsi, $0 = \int_\gamma f = \int_{C_\varepsilon} f + \int_{C_R} f + \int_{I^+} f + \int_{I^-} f \quad (\star)$

$$\int_{I^-} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(t)\,dt = \int_\varepsilon^R f(-t)\,dt$$

Ainsi, $\int_{I^-} f(z)\,dz + \int_{I^+} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R (f(t) + f(-t))\,dt$

$$= \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t} + \frac{e^{-it}}{-t}\,dt = \int_\varepsilon^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{t}\,dt$$

$$= \int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}\,dt \times 2i$$

$(\star)$ $[R \to +\infty]$, $[\varepsilon \to 0]$ devient :

$0 = -i\pi + 0 + 2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ d'où $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \pi/2$. $\boxtimes$

Preuve 2 : (Fourier - Plancherel) Soit $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]})(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\xi x}\,dx = \left[e^{-i\xi x}/-i\xi\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{e^{-i\xi/2} - e^{i\xi/2}}{-i\xi} = \frac{2}{\xi}\,\frac{e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}}{2i} = \frac{2\sin(\xi/2)}{\xi} = \operatorname{sinc}(\xi/2)$$

$\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]} \in L^2(\mathbb{R})$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\xi)}{\xi^2/2} = \underbrace{\left[\frac{(1-\cos\xi)}{-\xi/2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi/2}\,d\xi$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi}\,d\xi = 4\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi}\,d\xi$$

Par isométrie de Fourier-Plancherel, $\|\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]})\|_2^2 = 2\pi\,\|\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}\|_2^2$

$= 2\pi \times 1 = 2\pi$

Ainsi $2\pi = \|\operatorname{sinc}(\cdot/2)\|_2^2 = 4\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi}\,d\xi$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi}\,d\xi = \pi/2$. $\boxtimes$

Preuve 3 : (Fubini)

Rq : $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$ $\left(= \left[e^{-xy}/-x \right]_0^{+\infty} = 0 + 1/x \right)$. $A \geq 0$.

Ainsi, $\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^A \sin x \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy \right) dx$ $(*)$

On a $\int_0^A \int_0^{+\infty} |\sin x\, e^{-xy}|\,dy\,dx = \int_0^A \frac{|\sin x|}{x}\,dx < +\infty$.

Ainsi, par Fubini, $(*)$ devient :

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^A \sin x\, e^{-xy}\,dx \right) dy.$$

Or, $\int_0^A \sin x\, e^{-xy}\,dx = \operatorname{Im} \int_0^A e^{ix - xy}\,dx = \operatorname{Im} \left[\frac{e^{x(i-y)}}{i-y} \right]_0^A$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{A(i-y)} - 1}{i-y} \right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(e^{A(i-y)} - 1)(i+y)}{-(1+y^2)} \right)$$

$$= \frac{-e^{-Ay}\cos(A) - 1 + y e^{-Ay}\sin(A)}{-(1+y^2)} = \frac{1 - e^{-Ay}(y\sin(A) + \cos(A))}{1+y^2}$$

Or $|y\sin(A) + \cos(A)| \leq y+1$ et $y+1 \leq 2(1+y^2)$ ssi $2y^2 - y + 1 \geq 0$
$\leq 2(1+y^2)$ ssi $(y/2 - 1)^2 + \frac{7}{4}y^2 \geq 0$ ok $\forall y$.

Donc $\left| \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy \right| = \left| \int_0^{+\infty} \left(\int_0^A \sin x\, e^{-xy}\,dx - \frac{1}{1+y^2} \right) dy \right|$

$(**)$ $$= \left| \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-Ay}(y\sin(A) + \cos(A))}{1+y^2}\,dy \right| \leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-Ay}\,dy = \frac{2}{A}.$$

Soit $(**)$: $\left| \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{2}{A}$: donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

$\boxtimes$

Rq : On a une précision sur la vitesse de convergence :

$\left| \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{2}{x}$ (ou aussi $\left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| \leq \frac{2}{x}$)

Donc $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)$. Si : $x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ s'appelle sinus intégral.

Preuve 4 : On étudie la transformée de Laplace de sinc sur $\mathbb{R}_+^*$.

$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt$, $F \in C^1(]0,+\infty[)$. On trouve l'équa diff $F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

On résout et on trouve que $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall x > 0$.
et on montre la continuité de F en 0 (non trivial) ☒

Preuve 5 : On mq $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt$ $\in C^1$ est solution de $y'' + y = 1/x$
et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On mq $\psi : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} \, dt$ $\in C^1$ est aussi solution de l'équa diff et $\psi(x) \underset{+\infty}{\to} 0$ ($\sin(a-b) = \cos b \sin a - \sin b \cos a$).

On trouve $\psi(x) = f(x)$ $\forall x > 0$ et $\frac{\pi}{2} = f(0) = \lim_{x \to 0} \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ (à montrer)

(utiliser que $\int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t} \, dt \underset{x \to 0}{\sim} \int_x^{\pi/2} \frac{1}{t} \, dt \sim -\ln x$ (clv)
et que $\sin x \int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{t} \, dt \sim -x \ln x \underset{x \to 0}{\to} 0$) ☒

Prop : Pour $x \gg 1$, $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} \, dt \geq \frac{2}{\pi} \ln(x)$.

Preuve : $\int_0^{m\pi} \frac{|\sin t|}{t} \, dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \, dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \, dt$

$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \sim \frac{2}{\pi} \ln m$

Pour $m\pi \leq x < (n+1)\pi$ ($\Rightarrow x \sim m\pi$) on a $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} \, dt \gg \frac{2}{\pi} \ln m \sim \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)$
$\sim \frac{2}{\pi} \ln(x)$ ☒

Application : $\|D_n\|_1 \geq \frac{2}{\pi^2} H_{2n+1} \sim \frac{2}{\pi^2} \ln(n)$ où $D_n(t) = \frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin(t/2)}$ est le noyau de Dirichlet.

Preuve : $\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin(t/2)} \right| dt$

$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t/2} \, dt$ car $|\sin x| \leq |x|$. $u = (n + \frac{1}{2})t$

$\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} \, du \geq \frac{2}{\pi^2} H_{2n+1} \sim \frac{2}{\pi^2} \ln(2n+1) \sim \frac{2}{\pi^2} \ln n$ par ce qui précède ☒

Utilité : $\|D_n\|_1 \to +\infty$: Utilisation dans Banach-Steinhaus : $\exists f \in C^0$ tq sa série de F. diverge en 0