Bettinger Jérémy

Décomposition de Jordan - Chevalley - Dunford

Ref : Rombaldi (p616)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec χ_A scindé. $\Rightarrow \exists! \, D, N \in \mathbb{R}[A]$ tq $A = D + N$: $DN = ND$; D Dz ; $N^{k_0} = 0$ ($k_0 \in \mathbb{N}$)

<u>Démo</u> : Posons $P = \prod_{\lambda \in Sp A} (X - \lambda)$ scindé à racines simples $\left(P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'} \right)$

$CH \Rightarrow \chi_A(A) = 0$. Or $\chi_A = \prod_i (X - \lambda_i)^{n_i}$

donc en notant $R := \max_i (n_i)$ on a $\chi_A \mid P^R$.

Donc $P^R(A) = 0 \Rightarrow P(A)$ nilpotent.

<u>but</u> : Chercher D tq $P(D) = 0$.

En effet, alors D sera diagonalisable (P s.a.n.s.), de mêmes vp que A.

<u>Méthode Newton</u> : On pose $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = A_k - P(A_k) P'(A_k)^{-1} \end{cases}$

<u>Notation</u> : $X = Y + \mathcal{O}(Z)$ si $X - Y \in \langle Z \rangle$ idéal de $\mathbb{R}[A]$.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

i) $P(A_k) = \mathcal{O}(P(A)^{2^k})$ ii) $P'(A_k) \in GL_n(\mathbb{R})$.

<u>Rq</u> : ii) prouve que A_{k+1} est bien définie et que $A_{k+1} \in \mathbb{R}(A)$

car $\tilde{A} \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \tilde{A}^{-1} \in \mathbb{R}(A)$

<u>$k = 0$</u> : i) $P(A_0) = P(A) = \mathcal{O}(P(A))$.

ii) $P \wedge P' = 1$ car P est s.a.n.s. Donc par Bezout,

$\exists U, V$ tq $PU + P'V = 1 \rightsquigarrow P(A)U(A) + P'(A)V(A) = Id$

ie $P'(A)V(A) = \underbrace{I_n}_{\in GL_n} + \underbrace{\mathcal{O}(P(A))}_{\text{nilpotent car } P(A) \text{ nilpotent}} \in GL_n$ d'après le <u>Lm 1</u>.

<u>$k \Rightarrow k+1$</u> : But : Calculer $P(A_{k+1})$ ie $P(A_k - P(A_k)P'(A_k))$ et la dérivée.

$\Rightarrow$ idée faire Taylor.

i) On applique le <u>Lm 2</u> à $Q = P$; $X = A_k$; $Y = P(A_k)P'(A_k)^{-1}$

$$P(A_{k+1}) = P(A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1}) = P(A_k) - P(A_k)P'(A_k)^{-1}P'(A_k) + O(P(A_k)^2)$$
$$= O(P(A_k)^2) \overset{HR}{=} O(P(A)^{2^k}).$$

ii) On applique le <u>Lm 2</u> à $Q = P'$; $X = A_k$; $Y = P(A_k)P'(A_k)^{-1}$

$$P'(A_{k+1}) = P'(A_k) - P(A_k)P'(A_k)^{-1}P''(A_k) + O(P(A_k))$$
$$= \underbrace{P'(A_k)}_{\in GL_n \ (HR)\ ii)} + \underbrace{O(P(A_k))}_{\overset{HR}{=} O(P(A)^{2^k}) \text{ nilpotent car } P(A) \text{ nilpotent}}.$$

$\overset{\text{Lm 1}}{\Rightarrow} P'(A_{k+1}) \in GL_n$

<u>ccl</u> : On a obtenu par récurrence une suite définie $\forall k \in \mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}[A]$ tq $P(A_k) = O(P(A)^{2^k})$

Si R est l'indice de nilpotence de $P(A)$ alors $\forall k \geq \lfloor \log_2(R) \rfloor + 1 = n_0$, $P(A_k) = 0$.

Donc (A_k) est stationnaire et on note D sa limite.

On a $P(D) = P(A_{n_0}) = 0$ donc D est bien diagonalisable.

De plus, $D \in \mathbb{R}[A]$. On note $N := A - D$. On a bien $ND = DN$ car $N \in \mathbb{R}[A]$ puisque $D \in \mathbb{R}[A]$ (et $A \in \mathbb{R}[A]$).

Ainsi, $N = A - D = \sum_{k=0}^{n_0-1}(A_k - A_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n_0-1} P(A_k)P'(A_k)^{-1} = \sum_{k=0}^{n_0-1} O(P(A)^{2^k})$
$= \underbrace{O(P(A))}_{\text{nilpotent}}$

Donc N est nilpotent - <u>Existence</u>

<u>Unicité</u> : (N', D') un autre couple.

Alors $N' \in \mathbb{R}[A]$ donc N' commute avec $N \in \mathbb{R}[A]$. De même pour D et D'.

Donc D et D' sont codiagonalisables $\Rightarrow \exists P \in GL_n$ tq $\begin{cases} PDP^{-1} \in \text{Diag} \\ PD'P^{-1} \in \text{Diag} \end{cases}$ donc $P(D-D')P^{-1} \in \text{Diag}$. Et comme $N' + D' = N + D \Rightarrow D - D' = N' - N$

$\Rightarrow P(D-D')P^{-1} = P(N'-N)P^{-1} \in \text{Diag}$. Or $\begin{cases} N \\ N' \end{cases}$ nilpotentes alors $N - N'$ nilpotente <u>(Lm 3)</u>

Donc $P(N-N')P^{-1}$ nilpotente et diagonale $\Rightarrow$ nulle $\Rightarrow N = N'$
$\Rightarrow D = D'$. <u>Unicité</u>.

Lemmes Dunford

Lm 1 : Si $U \in GL_n$, N nilpotente, $NU = UN \Rightarrow U - N \in GL_n$.

Démo : Soit n_0 tq $N^{n_0} = 0$. Comme $UN = NU$, $(U^{-1}N)^{n_0} = 0$.

$$\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}(U^{-1}N)^k\right)(U-N) = U^{-1}\sum_{k=0}^{n_0-1}(U^{-1}N)^k(I_n - U^{-1}N) = U^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}(U^{-1}N)^k - \sum_{k=1}^{n_0}(U^{-1}N)^k\right)$$

$$= U^{-1}(I_n - (U^{-1}N)^{n_0}) = U^{-1}I_n.$$

Donc $(U-N)^{-1} = U\sum_{k=0}^{n_0-1}(U^{-1}N)^k$.

Lm 2 : Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ alors $Y^2 \mid (Q(X+Y) - Q(X) - YQ'(X))$

Démo : si $Q = X^p$: $Q(X+Y) = (X+Y)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}X^kY^{p-k}$

$$= X^p + Y p X^{p-1} + Y^2\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}X^kY^{p-2-k}$$

$$= Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X,Y).$$

cela prouve le résultat en utilisant la linéarité (si Q est CL des X^k, la relation reste vraie)

Lm 3 : $\begin{cases} N, N' \text{ nilpotents} \\ \alpha \in \mathbb{R} \\ NN' = N'N \end{cases} \Rightarrow N + \alpha N'$ nilpotente.

Démo : Prenons $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $N^{n_0} = N'^{n_0} = 0$.
Alors par la formule du Binôme : $(N+\alpha N')^{2n_0} = \sum_{k=0}^{2n_0}\binom{2n_0}{k}N^k N'^{2n_0-k}\alpha^{2n_0-k}$

si $k \geq n_0$ $N^k = 0$

si $k < n_0$ alors $2n_0 - k > n_0$ $N'^{2n_0-k} = 0$.

Donc $\forall\, 0 \leq k \leq 2n_0$ $N^kN'^{2n_0-k} = 0 \Rightarrow (N+\alpha N')^{2n_0} = 0 \Rightarrow N+\alpha N'$ nilpotente.

Refs :
- 131 développements pour l'oral. Pierre le Barbechon, ...
- Risler et Boyer (2006) Algèbre pour la L3 p62.
- Gourdon, Algèbre (2ème édition) [p193 unicité].

Leçons : 153, 155, 157, 148