Décomposition de Dunford classique

Ref : Gourdon, Algèbre (p 194-195)
FGN, Algèbre 2 4.25.

E ev sur K de dim finie

Thm : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tq χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. $\exists!\,(d,m)$, d dz, m nilp, tq $f=d+m$ et $dm=md$. De plus, d et m sont des polynômes en f

Lm : Soit F un poly. annulateur de f, on note $F=\beta\prod_{i=1}^{s} M_i^{\alpha_i}$ sa décompo en facteurs irr et $N_i=\mathrm{Ker}(M_i^{\alpha_i}(f))$. Alors $E=\bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ et la projection sur N_i, parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynôme en f

Dem du Lm : Le lemme des noyaux donne $E=\bigoplus_{j=1}^{s} N_j$. Posons $Q_i=\prod_{j\neq i} M_j^{\alpha_j}$.
Les Q_i n'ont aucun facteurs communs ensemble donc $\exists\, U_1,\dots,U_s$ tq $\sum_i U_iQ_i=1$ d'après le thm de Bézout. Donc $\sum_i U_i(f)\circ Q_i(f)=Id$.
Posons $P_i=U_iQ_i$ et $p_i=P_i(f)$. Mq p_i est le projecteur recherché.

• p_i projecteur : $\underset{(i\neq j)}{p_i\circ p_j}=Q_iQ_j(f)\circ U_iU_j(f)$. Or $F\mid Q_iQ_j$ donc $p_i\circ p_j=0$.
Et $\sum_j p_j=id \xrightarrow[\circ p_i]{} p_i^2=p_i$. ok

• $\mathrm{Im}(p_i)=N_i$: [⊂] Soit $y=p_i(x)\in\mathrm{Im}(p_i)$ alors $M_i^{\alpha_i}(f)(y)=M_i^{\alpha_i}(f)\circ P_i(f)(x)$
$=F(f)\circ U_i(f)(x)=0$
donc $y\in N_i$.
[⊃] Soit $x\in N_i=\mathrm{Ker}(M_i^{\alpha_i}(f))$ alors $x=\sum_j p_j(x)$.
Or si $j\neq i$, $p_j(x)=U_j(f)\circ Q_j(f)(x)=0$ car $M_i^{\alpha_i}\mid Q_j$ donc $x=p_i(x)\in\mathrm{Im}(p_i)$

• $\mathrm{Ker}(p_i)=\bigoplus_{j\neq i} N_j$: Pour $j\neq i$. $x\in N_j$ alors $p_i(x)=U_i(f)\circ Q_i(f)(x)=0$
car $M_j^{\alpha_j}\mid Q_i$ donc $\bigoplus_{j\neq i} N_j\subset\mathrm{Ker}(p_i)$
• Soit $x\in\mathrm{Ker}(p_i)$ alors $x=\sum_j p_j(x)\in\bigoplus_{j\neq i} N_j$ car $\mathrm{Im}(p_j)=N_j$.

• Les p_i sont des polynômes en f par construction.

□

Dem du thm : Existence : On applique le Lm à $\chi_f=\prod(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$.
Les N_i sont les ss espaces caractéristiques. On pose $d=\sum_i \lambda_i p_i\in K[f]$ qui est dz car les p_i sont dz ($X(X-1)$ est annulateur sans) et commutent donc sont codiagonalisables.
On pose $m=f-d=\sum_i (f-\lambda_i Id)p_i \Rightarrow m^k=\sum_i (f-\lambda_i Id)^k p_i$ car tout commute et $p_i\circ p_j=\delta_{ij}p_j$. Pour $k\geq\max(\alpha_i)$ on a $(f-\lambda_i Id)^k=0$ soit $m^k=0\Rightarrow m$ nilp.
De plus, $dm=md$ car m et d sont des polynômes en f.

Unicité : Soient 2 couples (d,n) et (d',n') $\begin{cases} nd = dn \\ d'n' = n'd' \end{cases}$, $n+d = n'+d' = f$

n' commute avec d' donc avec $d'+n' = f$.

Comme n est un polynôme en f, n' commute avec n. De même, d' commute avec d et d' sont donc codz donc $d-d'$ est dz. Or $d-d' = n'-n$ est nilp. (car n et n' commutent) donc $d-d'$ a que 0 pour vp donc $d-d' = 0$ i.e $d = d'$ donc $n = n'$. ✓

Corollaire : Les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\exp(A) = I_n$ sont les matrices dz dont le spectre est dans $2i\pi\mathbb{Z}$

Démo : $\exp(A) = I_n$. $A = D+N$.

On a $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ et $\exp(N) = \sum_{k\geq 0} \frac{N^k}{k!} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}}_{=:N'} + I_n$

$= \exp(D)(I_n + N') = \exp(D) + \underbrace{\exp(D)N'}_{\text{nilp (car commutent)}}$

Par unicité de la décomp de Dunford, $\begin{cases} \exp(D) = I_n \\ \exp(D)N' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exp(D) = I_n \\ N' = 0. \end{cases}$

$\exp(D) \in GL_n$

OR $N' = N(\underset{\in GL_n}{I_n} + \underset{\text{nilp}}{\tilde{N}})$ $\tilde{N} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}$ nilp

donc $I_n + \tilde{N} \in GL_n$

Car $\tilde{N} \equiv \begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow I_n + \tilde{N} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n$

donc $0 = N' = N(I_n + \tilde{N}) \Rightarrow N = 0$

$I_n + \tilde{N} \in GL_n$

Donc $A = D$ est dz.

Puis $\exp(Sp(A)) = Sp(\exp(A)) = Sp(I_n) = \{1\} \Rightarrow Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$. ✓

Rq : Ne donne pas bcp d'info, ex : $\begin{pmatrix} 0 & 2\pi i \\ -2\pi i & 0 \end{pmatrix}$