Image de l'exponentielle

Ref : Un Max de Maths, Zavidovique p48-55 ; 131 dev pour l'oral Lesesvre, Montaigu, Bourbonchon, Pinson

Thm : $\forall A \in GL_n(\mathbb{C}), \exists P \in \mathbb{C}[X], A = \exp(P(A))$.

En particulier, $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective. $\mathbb{C}[A]^\times = \exp(\mathbb{C}[A])$

Démo : ① $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

$\boxed{\subset}$ Trivial.

$\boxed{\supset}$ Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, A^{-1} est un polynome en A (Cayley-Hamilton).

Si $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, M^{-1} est un polynôme en M donc un polynôme en A.

Donc $M \in \mathbb{C}[A]^\times$

② $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs et un ouvert de $\mathbb{C}[A]$

• $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \det^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

• Soit $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$. $M(z) = zM + (1-z)N \in \mathbb{C}[A]$. On remarque que $\det(M(z))$ est polynomiale en z donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois. (et est non nul car $M(0), M(1) \in GL_n$.) Soit Z l'ensemble de ses racines. Z est fini donc $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs et contient 0 et 1. $\exists \gamma$ continu reliant 0 et 1 dans $\mathbb{C} \setminus Z$ donc $t \mapsto M(\gamma(t))$ relie M et N dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

Donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe.

③ But

Puisque $\exp A = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$ (car $\mathbb{C}[A]$ est fermé comme sev de dim finie de $M_n(\mathbb{C})$)

et $\det(\exp A) \neq 0$ donc $\exp(A) \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^\times$ ie $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$

Reste à mq $\mathbb{C}[A]^\times \subset \exp(\mathbb{C}[A])$. Comme $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe, il suffit de mq $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert fermé et non vide de $\mathbb{C}[A]^\times$.

④ $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert :

$\exp$ est C^1 sur $\mathbb{C}[A]$ et $D\exp(0) = Id$ est bijective. Par TIL, $\exists U$ v.o. de 0 dans $\mathbb{C}[A]$, V v.o de I_n dans $\mathbb{C}[A]^\times$ tq $\exp : U \to V$ soit un C^1-difféo.

Soit $M = \exp(N) \in \exp(\mathbb{C}[A])$ alors MV est un voisi ouvert de M dans $\exp(\mathbb{C}[A])$. En effet, l'exponentielle commute sur les polynômes en A donc $\exp(N+U) = \exp(N)\exp(U) = MV$.

Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert car voisinage de chacun de ses points. ($A \mapsto \exp(N)A$ est bicontinue car $\exp(N)$ inversible)

⑤ $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé :

Mq $\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M \exp(\mathbb{C}[A])$

$\boxed{\subset}$ Si $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ alors $M = M I_n = M \exp(0) \in \bigcup M \exp(\mathbb{C}[A])$

$\boxed{\supset}$ Soit $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$. Soit $N \in M \exp(\mathbb{C}[A])$. On a $N \in \mathbb{C}[A]^\times$ et si $N \in \exp(\mathbb{C}[A])$ alors $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Absurde. (car $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^\times$)

Donc $N \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$. Ce qui prouve la formule.

Or $\forall M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$, $M \exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert (comme précédemment)

Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé.

Par connexité, puisque $\exp(\mathbb{C}[A])$ est non vide, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$

⑥ $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

$\boxed{\subset}$ ok $\boxed{\supset}$ Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathbb{C}[A]^\times = \exp(\mathbb{C}[A])$, donc $\exists B \in \mathbb{C}[A] \subset M_n(\mathbb{C})$ tq $A = \exp(B)$.

⑦ Corollaire : $\exp(M_n(\mathbb{R})) = GL_n(\mathbb{R})^2 = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

$\boxed{\subset}$ Si $B = \exp(M)$ alors $B = \exp\left(\frac{M}{2}\right)^2$

$\boxed{\supset}$ Soit $B = A^2$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ $A = \exp(P(A))$.

Mais $\bar{A} = A = \exp(\bar{P}(A))$ donc $A^2 = \exp(P(A) + \bar{P}(A))$ donc $B \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$