Autour de l'exponentielle de matrice

I) Quelques formules :

Def 1 $\exp A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ elle cvn sur tout compact donc est cont.

Prop 2 : i) ${}^t\exp(A) = \exp({}^tA)$ ii) $\forall A\ \exists P \in \mathbb{K}[A]$ tq $\exp(A) = P(A)$
iii) si $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$
iv) si $N \in \mathcal{N}$ alors $e^N = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N^k}{k!}$

Dem : i) cont de la trace
ii) $\exp(A) = \lim_m \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{K}[A]$ et $\mathbb{K}[A]$ est un sev de dim finie donc fermé.
iii) calcul
iv) $N^k = 0\ \forall k \geq m$.

Prop 3 : si $AB = BA$ alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent.
Dem : $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$ or A et B commutent donc $\exp(A)$ et $\exp(B)$ aussi
$\exp(B) \in \mathbb{K}[B]$

Prop 4 : si $AB = BA$ alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$
Dem : Produit de CY + formule du binôme. ou pr pb de CY avec prop 5

Prop 5 : $\exists!$ sol à $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = v \end{cases}$ qui est $x(t) = \exp(tA)v$
Dem : Calcul + CYL.

Contre ex - prop 4 : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\exp(A+B) = \mathrm{ch}(1) I_2 + \mathrm{sh}(1)(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$. $\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$AB = BA$ est important !

Cor 7 : $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$
Cor 8 : $g_A : t \mapsto \exp(tA) \in \mathcal{C}^\infty$ et $g_A'(t) = Ag(t) = g(t)A$
De plus, si $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors lorsque $A'(t)$ et $A(t)$ commutent on a :
$\exp(A(t))' = A'(t)\exp(A(t))$. On a : $AB = BA$ ssi $\forall t$ $\exp(tA)\exp(tB) = \exp(t(A+B))$
($\Leftarrow$) dériver 2 fois chaque membre et eval(0).
Dem : Taux d'accroissement.

Prop 9 : $\left(I_d + \frac{A}{n}\right)^n \to \exp(A)$

Dém : Calculer $\left\|\exp(A) - \left(I_d + \frac{A}{n}\right)^n\right\| \leq \exp(\|A\|) - \left(I_d + \frac{\|A\|}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
(Classique)

Prop 10 (formule de Lie-Trotter-Kato) $\lim_{n \to +\infty} \left(e^{\frac{tA}{n}} e^{\frac{tB}{n}}\right)^n \to e^{t(A+B)}$ (admis)

VI) Dunford, exponentielles et logarithmes

Prop 11 : $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$ pour A $\mathrm{t}z$.

Dém : $\mathrm{t}z$

Prop 12 : Si P interpole $P(d_i) = e^{d_i}$ (Lagrange) on a $\exp(D) = P(D)$ lorsque D est dz.
Intérêt : calculer $\exp(D)$ sans calculer la mat de passage

Prop 13 : A dz ssi $\exp(A)$ dz (pour A $\mathrm{t}z$)
Dém : $\boxed{\Rightarrow}$ via prop 12. $\boxed{\Leftarrow}$ $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$ est la décomp de Dunford de $\exp(A)$

Prop 14 : $\exp(A) = I_n$ ssi $\begin{cases} A \text{ dz sur } \mathbb{C} \\ Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

Prop 15 : Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et dz sur $\mathbb{R}$ alors $\{\exp A = \exp(B)$ ssi $A = B\}$
Dém : $\boxed{\Leftarrow}$ trivial. $\boxed{\Rightarrow}$ $A \in K[\exp(A)]$ en interpolant le log car A dz. $P(e^{\lambda}) = \lambda$
Et $\exp(A) = \exp(B)$ donc $B \in K[\exp B] = K[\exp A]$ donc A et B commutent.
Donc sont codz, donc $A - B$ est dz donc son exp aussi. Et $\exp(A-B) = I_n$
$\underset{1}{Sp(I_n)} = \exp(Sp(A-B))$ donc $Sp(A-B) = \{0\}$ donc $A - B = 0 \Rightarrow A = B$.

Def 16 : $\forall A$ tq $\|A - I_d\| < 1$ $\log(A) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(A - I_d)^k$. Log est C^0.

Prop 17 : $\exp \circ \log = \log \circ \exp = id$ lorsque bien définis.

Prop 18 : $\exp : \mathcal{N}_n \to \mathcal{U}_n$ donc une bij $\log(I_n + N) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$.
$\mathcal{U}_n = \{I_n + N, N \in \mathcal{N}\}$

III) Surjectivité, injectivité

Prop 19 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Dem : Dunford multiplicatif et utilisation des log / inversion locale + $GL_n(\mathbb{C})$ connexe

Cor 20 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

Dem : par prop 19, pour B fixé $\in GL_n(\mathbb{C})$ $\exists A$ tq $B = \exp(A)$.
On pose $\gamma(t) = \exp(tB)$ $\gamma(0) = I_n$ $\gamma(1) = A$. $\gamma(t) \in GL_n(\mathbb{C}) \forall t \in \mathbb{R}$.

Cor 21 : $\left\{\begin{array}{l}\forall B \in GL_n(\mathbb{C}),\\ \forall p \in \mathbb{N}^*\end{array}\right.$ $\exists A \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A^p = B$. (faux si B nilpotent)

$\to B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $p = 2$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = 0$
$\Rightarrow A \in \mathcal{N} \Rightarrow A^2 = 0 \Rightarrow B = 0$.

Dem : On choisit A_0 tq $\exp(A_0) = B$ puis $A = \exp\left(\frac{A_0}{p}\right)$

Prop 22 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ a pour image $\{M^2, M \in GL_n(\mathbb{R})\}$

Dem : prop 19 donne un $P \in \mathbb{C}[X]$. On prend $P + \bar{P} \in \mathbb{R}[X]$.

Prop 23 : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective

Dem : Par réduction des isométries et $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Prop 24 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ n'est pas injective

Dem : $\exp(0) = \exp\begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix} = I_n$

Prop 25 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas injective

Dem : $\exp(0) = I_n = \exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$.

Prop 26 : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ n'est pas injective.

Dem : mêmes matrices

Prop 27 : $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est bijective, de réciproque le log (prop 18).

IV) Régularité

Prop 28 : $\exp : \mathcal{M}_n(K) \to GL_n(K)$ est C^∞, vérifie $d(\exp)(0) = Id$ et réalise un difféo d'un voisin de $0 \in \mathcal{M}_n(K)$ sur un voisin de I_n dans $GL_n(K)$.

Dem : $\exp \in C^\infty$ par CVN. et $\exp H = I_n + H + O(\|H\|^2)$ donc $d(\exp)(0)(H) = H$
i.e. $d(\exp)(0) = Id$.
Par TIL, exp est un C^∞ difféo de $0 \to I_n$.

Prop 29 : $d(\exp)_X(H) = \exp(X) \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)!} (-ad_X)^k [H]$

où $ad_X(H) = XH - HX$

Dem : Diff sous la somme $= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)!} \underbrace{\left(\sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leq i,j\leq k}} X^i H X^j \right)}_{=(-ad_X)^k [H]}$

Rq 30 : $dAd_{Id} = ad$
où $Ad_A(M) = AMA^{-1}$

Prop 31 : $\exp(ad_X) = Ad_{\exp(X)}$ (admis)

V) Topologie et homéo

Prop 32 : i) $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ réalisent des homéomorphismes.
ii) $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$
iii) $\exp \; \mathcal{U}_n(K) \to \mathcal{U}_n(K)$ (unipotentes)

Dem : iii) déjà vu, la C^0 découle de celle de exp et de log.
i) et ii) même démo : travailler avec le spectre et la norme 2 et le théorème spectral.

Prop 33 : $O(p,s) \underset{\text{homéo}}{\simeq} O(p) \times O(s) \times \mathbb{R}^{ps}$ où $O(p,s) = \{M, I_{ps} M I_{ps} = M\}$
$I_{ps} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$ $p,s \geq 1$

Dem : Utiliser la décompo polaire + homéo de l'exp (homéo)

Cor 34 : $O(p,s)$ a 4 composantes connexes.

VI) Systèmes différentiels

Prop 35 : si χ_A scindé, $\lim_{t\to+\infty} \exp(tA) = 0$ ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$, $Re\,\lambda < 0$.

Dem : $\Rightarrow$ Vient du fait que $\exp(tA).X = e^{t\lambda} X$ pour $AX = \lambda X$.
$\Leftarrow$ Dunford : pour $\|M\| = \sum |m_{ij}|$ on a $\|\exp(tD)\| \leq \|P\|\|P^{-1}\| \sum_{i=1}^{n} e^{t Re(\lambda_i)} \leq m e^{t\mu} \|P\|\|P^{-1}\|$
et $\|\exp(tN)\| \leq m + t\|N\| + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\|N\|^{n-1} = g(t)$ $\quad \mu = \sup\{Re(\lambda_i)\} < 0$

$\|\exp(tA)\| \leq e^{t\mu} f(t) \underset{t\to+\infty}{\to 0} \; (\mu<0)$ où $f(t) = m\|P\|\|P^{-1}\| g(t) \in K[t]$.

Cor 36 : $Y' = AY$ tend exponentiellement vers 0 (asympt stable) ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$ $Re\,\lambda < 0$

Thm 37 : (Lyapunov) Soit $f \in C^1$ un champ de vecteurs tq $f(0) = 0$. Si $A = Df(0)$ vérifie $\forall \lambda \in Sp(A)$ $Re(\lambda) < 0$ alors 0 est un point fixe attractif ie pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ proche de 0, la solution de $u'(t) = f(u(t))$, $u(0) = x_0$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $u(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. De plus, cette cv se fait exponentiellement. (admis).