Bettinger
Pierre ?

223 226 229
243 253 264
($\simeq$ 241, 260, 261)

# Processus de Galton - Watson

Refs : . Probabilités pour les non probabilistes, Walter Appel.
. Benaïm el-Karoui, promenade aléatoire (p 153)
. Cottrel : exos de probas (p72)

ns modélise un processus de branchement (gènes, noms de famille, ...)

## Modélisation Mathématique : $X \in L^1$, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

$p_k = \mathbb{P}(X=k)$, $m = \mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} k\, p_k < +\infty$

$(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ famille iid de loi $\mathbb{P}_X$.

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\Pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$

$P_{ext} = \mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0)$

→ Des particules sont capables de générer des particules de la même famille. Chaque particule a la proba $p_k$ d'engendrer $k$ particules indépendantes (constante au cours des générations).
Une particule originale représente la génération 0.
Les descendants de la $n$-ième génération forment la $(n+1)$-ième génération.
$Z_n$ est le nb d'individus à la génération $n$.
Chaque individu $i$ de la $n$-ième génération a un nb $X_{i,n}$ de descendants ($1 \leq i \leq Z_n$).
$\Pi_n$ proba d'extinction à la génération $n$.
$P_{ext}$ est la proba d'extinction de la population.

On se demande si $\exists n$ tq $Z_n = 0$ } On va étudier $(Z_n)$.

Hypo : $p_0 \in ]0,1[$. → si $p_0 = 0$ : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $Z_n \geq 1$ ps et $P_{ext} = 0$.
→ si $p_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $Z_n = 0$ ps et $P_{ext} = 1$

## (1) Fonction génératrice de X

$$G(s) := \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k\geq 0} p_k s^k \quad 0 \leq s \leq 1.$$

On a $G(s) \leq 1$ et $G(1) = 1$.

Prop 1 : 1) $G$ est bien définie sur $[0,1]$ et est de classe $C^1$.
2) a) $G$ est strict $\nearrow$ sur $]0,1[$.
b) $G$ est convexe sur $]0,1[$.
c) $G$ est strict convexe sur $]0,1[$ ssi $p_0 + p_1 < 1$.

Démo : 1) $G$ bien définie car $G(s) \leq G(1) < +\infty$.
$s \mapsto p_k s^k$ est $C^1$ sur $[0,1)$ et la série $\sum k p_k s^{k-1}$ CVN sur $[0,1)$ ($\leq \sum k p_k = m < +\infty$). Donc $\sum p_k s^k$ est $C^1([0,1])$.

2) Par thm de dérivation d'une série entière on a :
$$G'(s) = \sum_{k\geq 1} k p_k s^{k-1} \text{ et } G''(s) = \sum_{k\geq 2} k(k-1) p_k s^{k-2}$$

puisque $p_0 < 1$, $\exists k_0 \geq 0$ $p_{k_0} > 0$.
a) $G'(s) \geq k_0 p_{k_0} s^{k_0 - 1} > 0$ $(s > 0)$
b) $G''(s) \geq k_0(k_0-1) p_{k_0} s^{k_0-2} \geq 0$.
c) . si $p_0 + p_1 < 1$ alors $\exists k_1 > 1$ tq $p_{k_1} > 0$ : $G''(s) \geq k_1(k_1-1) p_{k_1} s^{k_1-2} > 0$.
. si $p_0 + p_1 = 1$ $G(s) = p_0 + (1-p_0)s$ pas strict convexe.

$\square$

Rq : $G'(1) = m$.

## 8) Fonction génératrice de $Z_n$ et relation de réc.

$$G_n(s) := \mathbb{E}\left(s^{Z_n}\right) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_n = k)\, s^k$$

On a $G_n(0) = \pi_n$, $G_n'(1) = \mathbb{E}(Z_n)$.

<u>Lm 2</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}, Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,n}$.

<u>Démo</u> : $Z_n$ ne dépend que de $Z_{n-1}$ et de $(X_{i,n-1})_{i\in\mathbb{N}}$.
Par réc, $Z_n$ ne dépend que de $(X_{i,j})_{i\geq 0, j<m}$
Par ind des $(X_{i,j})$, $\forall i \in \mathbb{N}$ $Z_n \perp\!\!\!\perp X_{i,m}$. $\square$

<u>Prop 3</u> : $G_n = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}} = G^n$.

<u>Démo</u> : On a $G_{n+1}(s) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_{n+1} = k)\, s^k$.

<u>Par réc</u> :

<u>$\cdot\, m=1$</u> $G_1(s) = \sum \mathbb{P}(Z_1 = k)\, s^k = \sum \mathbb{P}(X_{1,0} = k)\, s^k \overset{X_{i,0}\sim X}{=} G(s)$.

<u>$\cdot\, m \Rightarrow n+1$</u> : On suppose $G_n = G^n$

$$G_{n+1}(s) = \mathbb{E}\left(s^{Z_{n+1}}\right) = \mathbb{E}\left(s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,m}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_{i,n}}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0}\left(\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,n}} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right)\right) \overset{\text{Fubini}}{\underset{\geq 0}{=}} \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{k} s^{X_{i,m}} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right)$$

$$\overset{X_{i,n} \perp\!\!\!\perp Z_n \text{ et } (X_{i,n}) \text{ iid}}{=} \sum_{k\geq 0}\left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(s^X\right)\right)\mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_n = k)\, G(s)^k = G_n(G(s))$$

$$\overset{HR}{=} G^n(G(s)) = G^{n+1}(s). \quad \square$$

<u>Rq</u> : On obtient $\pi_{n+1} = G_{n+1}(0) = G(G_n(0)) = G(\pi_m)$.

## 3) Étude de la probabilité d'extinction

### A) Récurrence et convergence

Rq : $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$ ie $\left(\{Z_n = 0\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\nearrow$ donc $\pi_n$ aussi.

Comme $\pi_n \leq 1$, alors $(\pi_n)$ est $\nearrow$ majorée donc CV vers $\pi_{ext}$ car

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\} = \{\exists n, Z_n = 0\}$ ie $\pi_{ext} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right)$
$= \lim \mathbb{P}(\{Z_n = 0\}) = \lim \pi_n$
(cont $\nearrow$).

De plus, $\pi_{ext} \geq \pi_n \geq \pi_1 = p_0 > 0$.
ie l'extinction est possible

**Proposition 4** : $\pi_{ext}$ est le plus petit point fixe de $G$

**Démo** : $\pi_{n+1} = G(\pi_n) \underset{cont}{\Rightarrow} \pi_{ext} = G(\pi_{ext})$.

Soit $u > 0$ un autre pt fixe de $G$. Montrons par rec que $\pi_n < u$.

- $\pi_1 = p_0 = G(0) < G(u) = u$ (par $\nearrow$ stricte de $G$).
- $\pi_n < u \Rightarrow \underbrace{G(\pi_n)}_{= \pi_{n+1}} < G(u) = u$.

Donc $\pi_n < u$ ie $\pi_{ext} \leq u$ à la limite.

Donc $\pi_{ext}$ est le + petit pt fixe de $G$ ☐

### B) La population va t-elle p.s s'éteindre ?

**Théorème 5** : - Si $m \leq 1$ alors $\pi_{ext} = 1$.
- Si $m > 1$ alors $\pi_{ext}$ est l'unique point fixe de $G$ sur $]0,1[$.

**Démo** : Puisque $G(1) = 1$ $G$ coupe la droite $y = x$ en $(1,1)$.

- si $p_0 + p_1 = 1$, $G$ est une droite affine ($G(0) = p_0 > 0$) donc il n'y a qu'un pt fixe c'est en $(1,1) \Rightarrow \pi_{ext} = 1$. ☐

rq : $p_0 + p_1 = 1 \Rightarrow m = p_1 < 1$.

## (4) Espérance de $Z_n$

Prop 6 : $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

Dém : . $Z_0 = 1 \rightarrow \mathbb{E}(Z_0) = 1 = m^0$.

. $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ pour un $n$.

$G_{n+1} = G_n \circ G \rightarrow G_{n+1}'(s) = G'(s)\, G_n'(G(s))$

en $s = 1$ : $\underbrace{G_{n+1}'(1)}_{= \mathbb{E}(Z_{n+1})} = G'(1)\, G_n'(G(1)) = m\, G_n'(1) = m\, \mathbb{E}(Z_n) = m^{n+1}$.

$\square$

Rq : $(Z_n)$ chaîne de Markov issue de 1 dont l'espace d'états est dénombrable. 0 est absorbant. Chaîne transiente