152, 161, 191

Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard

Ref : Gourdon, Algèbre p262

<u>Lm 1</u> : Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée alors $G(x_1, \dots, x_n) = 0$.

<u>Démo</u> : On a $\sum_1^n \lambda_i x_i = 0$ avec au moins un $\lambda_i \neq 0$.

ie $\forall j$ $0 = \langle x_j, \sum_1^n \lambda_i x_i \rangle = \sum_1^n \lambda_i \langle x_j, x_i \rangle$

Donc vectoriellement : $\sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} \left(\langle x_j, x_i \rangle \right)_{1 \leq j \leq m} = 0$

Donc $\underbrace{\left((\langle x_j, x_1 \rangle)_{1 \leq j \leq m}, \dots, (\langle x_j, x_m \rangle)_{1 \leq j \leq m} \right)}_{=: F}$ est liée.

Donc $G(x_1, \dots, x_n) = \det(F) = 0$. □

<u>Thm 2</u> : E préhilbertien, F sev de E de base $(e_1, \dots, e_n)$, $x \in E$, alors :

$$G(e_1, \dots, e_n, x) = d(x, F)^2 G(e_1, \dots, e_n)$$

<u>Démo</u> : Comme F est un sev de dim finie de E, $d(x, F)$ est atteint en un unique point $\pi_F(x) \in F$ ie $d(x, F) = \| x - \pi_F(x) \|$ avec :
$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\langle x, e_i \rangle = \langle \pi_F(x), e_i \rangle$ et $\|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|x - \pi_F(x)\|^2$

donc :

$$G_{n}(e_1, \dots, e_n, x) = \begin{pmatrix} G_n(e_1, \dots, e_n) & \begin{matrix} \langle e_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, x \rangle \end{matrix} \\ \langle x, e_1 \rangle \dots \langle x, e_n \rangle & \langle x, x \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{G_n(e_1, \dots, e_n)} & \begin{matrix} \langle e_1, \pi_F(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, \pi_F(x) \rangle \end{matrix} \\ \langle \pi_F(x), e_1 \rangle \dots \langle \pi_F(x), e_n \rangle & \|\pi_F(x)\|^2 + \|x - \pi_F(x)\|^2 \end{pmatrix}$$

Par linéarité du det selon la dernière colonne :

$$G(e_1, \dots, e_n, x) = G(e_1, \dots, e_n, \pi_F(x)) + \begin{vmatrix} G_n(e_1, \dots, e_n) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \langle \pi_F(x), e_1 \rangle \dots \langle \pi_F(x), e_n \rangle & \|x - \pi_F(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= G(e_1, \dots, e_n, \pi_F(x)) + G(e_1, \dots, e_n) \|x - \pi_F(x)\|^2$$

$$= 0 + d(x, F)^2 G(e_1, \dots, e_n)$$

Car $(e_1, \dots, e_n, \pi_F(x))$ est liée + Lm 1. □

<u>Corollaire 3</u> :
- $G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$
- si $E = \mathbb{C}^n$ alors $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$

On a égalité ssi (x_i) est orthogonale ou si un des vecteurs est nul.

Démo : (1) Si la famille est liée :

D'après Lem 1, $G(x_1,\dots,x_n)=0$ donc l'inégalité est vraie et stricte si les vecteurs sont non nuls

(2) Si la famille est libre : Par récurrence :

$n=1$: $G(x_1)=\|x_1\|^2$ ok

$n\Rightarrow n+1$: $(x_1,\dots,x_{n+1})$ libre. $F := \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

On a $\pi_F(x_{n+1}) \perp (x_{n+1}-\pi_F(x_{n+1}))$ donc

$\|x_{n+1}-\pi_F(x_{n+1})\|^2 \le \|x_{n+1}-\pi_F(x_{n+1})\|^2+\|\pi_F(x_{n+1})\|^2 \le \|x_{n+1}\|^2$.

avec égalité ssi $\pi_F(x_{n+1})=0$ ie $x_{n+1}\in F^\perp$.

D'après le thm précédent,
$$G(x_1,\dots,x_{n+1}) = G(x_1,\dots,x_n)\|x_{n+1}-\pi_F(x_{n+1})\|^2$$
$$\le \|x_{n+1}\|^2 G(x_1,\dots,x_n)$$
$$\underset{HR}{\le} \prod_{i=1}^{n+1}\|x_i\|^2$$

avec égalité ssi $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille orthogonale.

(3) Cas où $E=\mathbb{C}^n$: On note N la matrice dont les colonnes sont les x_i :

$G_{\mathbb{R}}(x_1,\dots,x_n) = N^*N \ (= {}^t\overline{N} N)$

D'où $G(x_1,\dots,x_n)=|\det N|^2$ d'où :

$|\det(x_1,\dots,x_n)|^2 = |\det N|^2 = G(x_1,\dots,x_n)\le\prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$

avec égalité ssi $(x_1,\dots,x_n)$ est orthogonale ou $\exists i$ tq $x_i=0$. □

Rq 4 : $G(x_1,\dots,x_n)=0 \Rightarrow (x_1,\dots,x_n)$ liée

Démo : $G(x_1,\dots,x_n)=0 \Rightarrow (\langle x_i,x_j\rangle_{1\le i\le n})_{1\le j\le n}$ est liée :

$\exists \alpha_j \neq 0$ tq $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $\langle x_i,x_k\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j\langle x_i,x_j\rangle = \langle x_i, \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} x_j\rangle$

donc $x_k - \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j}x_j \in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)\cap\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)^\perp=\{0\}$ donc $(x_1,\dots,x_n)$ est liée. □

Ex 5 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\exists c>0$ $\forall i,j$ $|a_{ij}|<c$ alors $|\det A|\le c^n n^{n/2}$

Démo : $|\det A| \le \prod_{i=1}^n \|A_i\|$ où $A=(A_1\dots A_n)$. Or $\|A_j\|^2 = A_j^*A_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \le nc^2$

$\le \prod_{i=1}^n(\sqrt{n}\, c) = c^n n^{n/2}$. □