Connexité des v.a. et lemme de la grenouille

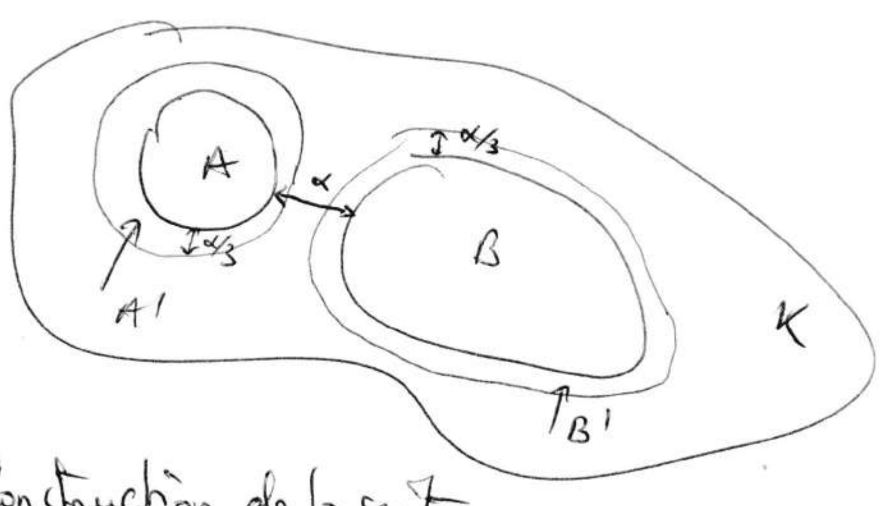
<u>Refs</u> : Gourdon p46 ; FGN Analyse 1 p86-87.

<u>Théorème</u> : (E,d) métrique compact et (u_n) suite de E tq $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$.
Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.

<u>Démonstration</u> : On note $A_p = \{u_n, n \geq p\}$. L'ensemble des v.a. de (u_n) est $\Gamma := \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}$. C'est un fermé et comme E est compact, Γ est compact.

(1) Supposons par l'absurde Γ non connexe ie $\Gamma = A \cup B$ deux fermés non vides disjoints de Γ. Comme Γ est compact alors A et B sont aussi compacts.
Donc $\alpha = d(A,B) > 0$ car $A \cap B = \emptyset$.

Notons $A' = \{x \in E, d(x,A) < \alpha/3\} = \bigcup_{x \in A} B(x, \alpha/3)$
et $B' = \{x \in E, d(x,B) < \alpha/3\}$
A' et B' sont ouverts donc $K = (A' \cup B')^c$ est fermé donc compact.
Mq (u_n) a une v.a. dans K, ce qui sera absurde car $\Gamma \cap K = \emptyset$.



(2) <u>Construction de la suite</u>

Puisque $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$ alors $\exists N_0, \forall n \geq N_0 \ d(u_n, u_{n+1}) < \alpha/3$.
Soit $N \geq N_0$, $a \in A$. a est v.a. donc $\exists n_1 > N$ tq $d(a, u_{n_1}) < \alpha/3$ donc $u_{n_1} \in A'$.
Si $b \in B$, b est v.a. donc $\exists n_2 > n_1$ tq $d(b, u_{n_2}) < \alpha/3$ donc $u_{n_2} \in B'$.
Posons $n_0 = \inf\{n \geq n_1, u_n \notin A'\}$ [existe car $u_{n_2} \notin A'$].
Ainsi, $u_{n_0-1} \in A'$ donc :
$$d(u_{n_0}, B) \geq d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \geq d(A,B) - d(u_{n_0-1}, A) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) > \alpha/3$$
donc $u_{n_0} \notin B'$. De plus, $u_{n_0} \notin A'$ donc $u_{n_0} \in K$.

On a mq $\forall N \geq N_0$, $\exists n_0 \geq N$ tq $u_{n_0} \in K$. On peut donc construire une sous suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) qui prend ses valeurs dans K $\left(\text{car } \{n \geq N_0 \mid d(u_n, a) < \alpha/3\} \text{ st infini}\right)$.

(3) Conclusion :

Comme K est compact, donc la suite $(u_{\varphi(n)})$ a au moins une v.a dans K, mais st aussi v.a de (u_n) donc st dans $\Gamma \cap K = (A \cup B) \cap K \subset (A' \cup B') \cap K = \emptyset$.
Absurde, donc Γ st connexe. $\square$

Corollaire : (lemme de la grenouille) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et $(x_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [0,1]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Alors (x_n) cv ssi $x_{n+1} - x_n \to 0$.

Démo : $\boxed{\Rightarrow}$ trivial

$\boxed{\Leftarrow}$ D'après le thm, Γ st un intervalle fermé de $[0,1]$

Mq Γ est constitué de pts fixes de f. Soit $a \in \Gamma$, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗ tq $x_{\varphi(n)} \to a$. Alors : $a = \lim x_{\varphi(n)} \underset{\text{hypo}}{=} \lim x_{\varphi(n)+1} = \lim f(x_{\varphi(n)}) \underset{f \in C^0}{=} f(a)$

Ainsi, si (x_n) possède au moins 2 va, $l < l'$ alors $[l, l'] \subset \Gamma$ donc $\frac{l+l'}{2}$ st v.a. donc $\exists N$ tq $x_N \in [l, l']$. Mais alors x_N est point fixe de f donc (x_n) st stationnaire en x_N donc il n'y a qu'une v.a. Absurde

Ainsi (x_n) n'a qu'une v.a donc converge. $\square$