Nb de racines d'un polynôme - Formes de Hankel

Ref : H2G2 Tome 1

Leçons : 144, 159, 170, 171, (152)

Thm : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de racines complexes distinctes $x_1, \dots, x_t$ de mult respectives $m_1, \dots, m_t$ et $s_k = m_1 x_1^k + \dots + m_t x_t^k$ alors

$$\sigma_{\mathbb{R}} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \sum_{0 \le i, j \le n-1} s_{i+j} y_i y_j \end{array} \in Q(\mathbb{R}^n)$$

Si on note $(p,q) = \mathrm{sign}(\sigma_{\mathbb{R}})$ alors le nb de racines de P est $t = p+q$ et le nb de racines réelles distinctes de P est $r = p-q$.

Dem : ① $\sigma_{\mathbb{R}} \in Q(\mathbb{R}^n)$

Quitte à réindexer, ops $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$, $x_{r+1}, \dots, x_{r+\frac{t-r}{2}} \notin \mathbb{R}$, et $x_{r+\frac{t-r}{2}+1} = \overline{x_{r+1}}, \dots, x_t = \overline{x_{r+\frac{t-r}{2}}}$.

Or $\forall j \in [\![r, r+\frac{t-r}{2}]\!]$ x_j et $\overline{x_j}$ ont même mult donc on a :

$s_k = \sum_{j=1}^{t} m_j x_j^k = \sum_{j=1}^{r} m_j x_j^k + \sum_{j=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} m_j (x_j^k + \overline{x_j}^k)$ donc s_k est réel donc $\sigma_{\mathbb{R}}$ est un polynôme homogène de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'où $\sigma_{\mathbb{R}}(y) \in Q(\mathbb{R}^n)$

② Réécriture de $\sigma_{\mathbb{R}}$:

On pose $\varphi_k(y) = y_0 + x_k y_1 + \dots + x_k^{n-1} y_{n-1}$. Alors $\varphi_k \in (\mathbb{C}^n)^*$.

De plus en notant $(e_i^*)_{0 \le i \le n-1}$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ on a :

$\varphi_k(e_j) = x_k^j$ donc $\varphi_k = e_0^* + x_k e_1^* + \dots + x_k^{n-1} e_{n-1}^*$.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{e^*}(\varphi_1, \dots, \varphi_t) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 \; x_2 & \cdots & x_t \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_t^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,t}(\mathbb{C})$ avec $t \le n$ car un polynôme de degré n a au plus n racines $\neq$.

On peut extraire une matrice de taille t inversible comme matrice de Vandermonde associée à une famille d'éléments distincts. Ainsi $(\varphi_1, \dots, \varphi_t)$ est une famille de rang t i.e libre.

De plus, le coeff de $y_i y_j$ dans la forme quadratique φ_k^2 est $x_k^i x_k^j$ si $i=j$, et si $i \neq j$: $2 x_k^i x_k^j$. Ainsi le coeff $y_i y_j$ dans la f.q $\sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$ est : $\sum_{k=1}^{t} 2 m_k x_k^i x_k^j = 2 s_{i+j}$ $i \neq j$, $i=j$: s_{i+j} donc on a l'égalité des 2 f.q sur $\mathbb{C}^n$:

$$\sigma_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2.$$

Puisque les φ_k sont indépendants dans $\mathbb{C}$, on a $rg(\sigma_{\mathbb{R}}) = t$ et aussi dans $\mathbb{R}$ car le rang est invariant par extension de corps. De plus, $rg(\sigma_{\mathbb{R}}) = p+q$ donc le nb de racines $\neq$ de P est $t = p+q$.

③ Nombre de racines réelles

On a $z^2 + \bar{z}^2 = 2\,Re(z)^2 - 2\,Im(z)^2$ donc

$$\sigma_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{R} m_k \varphi_k^2 + \sum_{k=R+1}^{R+\frac{t-R}{2}} m_k \underbrace{(\varphi_k^2 + \bar{\varphi_k}^2)}_{= 2\,Re(\varphi_k)^2 - 2\,Im(\varphi_k)^2}$$

De plus, on a indépendance entre les formes linéaires réelles qui sont dans la somme.

En effet, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_{n+1}, \dots, \mu_{n+\frac{t-R}{2}}, \mu'_{n+1}, \dots, \mu'_{n+\frac{t-R}{2}} \in \mathbb{R}$ tq

$$\sum \lambda_k \varphi_k + \sum \mu_k\, Re(\varphi_k) + \sum \mu_k'\, Im(\varphi_k) = 0$$

Et par les formules d'Euler : $\sum \lambda_k \varphi_k + \frac{1}{2}\sum \mu_k(\varphi_k + \bar{\varphi_k}) + \frac{1}{2i}\sum \mu_k'(\varphi_k - \bar{\varphi_k}) = 0$

soit : $\sum_{1}^{R} \lambda_k \varphi_k + \frac{1}{2}\sum_{R+1}^{R+\frac{t-R}{2}} (\mu_k - i\mu_k')\varphi_k + \frac{1}{2}\sum_{n+1}^{n+\frac{t-R}{2}} (\mu_k + i\mu_k')\underbrace{\bar{\varphi_k}}_{} = 0$

donc on a une CL des $\varphi_k = 0$, par liberté, on a : $= \varphi_j$, $j \geq n + \frac{t-R}{2}$ car $x_k = \bar{x_j}$ $\notin \mathbb{R}$

$\forall k \in [\![1, R]\!]\ \lambda_k = 0$, $\forall k \in [\![n+1, \frac{n-t}{2}+R]\!]\ \mu_k - i\mu_k' = 0 \Rightarrow \forall k\ \mu_k = \mu_k'$ ($\mu_k, \mu_k' \in \mathbb{R}$)

d'où la liberté.

Donc $\sigma_{\mathbb{R}}$ s'écrit comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Par unicité de la signature, $(p,q) = sign(\sigma_{\mathbb{R}}) = \left(n + \frac{t-R}{2}, \frac{t-R}{2}\right) = \left(\frac{t+n}{2}, \frac{t-R}{2}\right)$

Le nb de racines réelles R est donc $p - q$. ☐

Ex : $P(X) = x^2 + bx + c$ $\qquad \lambda_1, \lambda_2$ racines dans $\mathbb{C}$ qu'on suppose simples

$s_0 = 2$ $\qquad s_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1+\lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = b^2 - 2c$

$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = -b$

Donc $\sigma_R(y) = s_0 y_0^2 + 2s_1 y_0 y_1 + s_2 y_1^2 = 2y_0^2 - 2b y_0 y_1 + (b^2-2c)y_1^2$

$$= 2\left(y_0 - \frac{b}{2}y_1\right)^2 - \frac{b^2}{2}y_1^2 + (b^2-2c)y_1^2 = 2\left(y_0 - \frac{b}{2}y_1\right)^2 + \frac{b^2-4c}{2}y_1^2.$$

si $b^2 - 4c > 0$ alors $\mathcal{E}(\sigma_R) = (2,0)$ il y a donc $2 - 0 = 2$ racines réelles

si $b^2 - 4c = 0$ alors $\mathcal{E}(\sigma_R) = (1,0)$ il y a donc 1 racine ($p+q=1$) et qui est réelle. (donc double)

si $b^2 - 4c < 0$ alors $\mathcal{E}(\sigma_R) = (1,1)$ il y a 2 racines et $1-1=0$ racines réelles.

Donc il y a 2 racines complexes (conjuguées) non réelles. ☐

Intérêt du thm : Connaître le nb de racines réelles et complexes $\neq$ sans connaître les racines. Calculer σ_R via les calculs de s_i (relations coeffs-racines) puis calcul de $\mathcal{E}(\sigma_R)$ via l'algo de Gauss.