Théorème taubérien fort

Réf : Gourdon, Analyse

Leçons : 209, 228, 230, 235, 241, 243

Thm (Hardy – Littlewood) : Soient (a_n) une suite de réels vérifiant $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ tq la série $\sum a_n z^n$ a un Rcv ≥ 1 et sa somme $F(x)$ vérifie $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = s$.
Alors $\sum a_n$ converge et vaut s.

Démo : Quitte à considérer $a_0 - s$ comme premier terme de la suite cps $s = 0$.
On note : $\Phi = \left\{ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R},\ \sum a_n \varphi(x^n) \text{ cv pour } 0 \leq x < 1 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0 \right\}$.

Posons $g(x) = \mathbb{1}_{[1/2, 1]}(x)$ et $N_x = \left\lfloor -\frac{\ln 2}{\ln x} \right\rfloor$. Alors pour $0 \leq x < 1$:
$\sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n$. De plus $N_x \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi, si on mq $g \in \Phi$ alors on aura démontré le thm.

1) Lm ① : $X\mathbb{R}[X] \subset \Phi$.

Φ est stable par CL, il suffit de mq $X^k \in \Phi$ $\forall k \geq 1$.
Et on a $x^k < x$ car $0 \leq x < 1$ donc $\sum_{n \geq 0} a_n (x^k)^n$ cv car $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ cv (comparaison) + hypo
Et $\sum_{n \geq 0} a_n (x^k)^n = F(x^k) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$ (hypo)

Donc $X\mathbb{R}[X] \subset \Phi$.

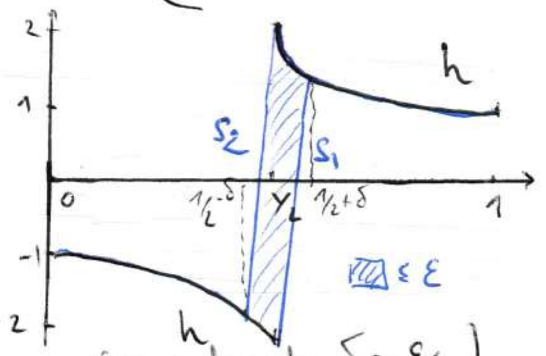
2) Lm ② : Mq $\forall P \in \mathbb{R}[X]$ $(1-x) \sum_{n \geq 0} x^n P(x^n) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \int_0^1 P(t)\,dt$

Par linéarité, il suffit de le montrer pour X^k $\forall k \geq 0$.
On a $(1-x) \sum_{n \geq 0} x^n x^{kn} = (1-x) \sum_{n \geq 0} (x^{k+1})^n \underset{|x|^{k+1} < 1}{=} \frac{1-x}{1-x^{k+1}} = \left(1 + x + \dots + x^k\right)^{-1}$
Donc $(1-x) \sum_{n \geq 0} x^n x^{kn} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k\,dt$. D'où le résultat $\forall P \in \mathbb{R}[X]$.

3) Approximation de g :

On pose $g(x) = x + x(1-x)h(x)$ ie $h(x) = \dfrac{g(x)-x}{x(1-x)} = \begin{cases} 1/x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 1/x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists s_1, s_2 \in C^0$ tq $s_1 \leq h \leq s_2$
et $\int_0^1 (s_2 - s_1) \leq \varepsilon$



(on peut prendre $\delta = \varepsilon/8$)

Puisque $s_1, s_2 \in C^0([0,1])$,
$\exists P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tq $\begin{cases} |s_1 - P_1| < \varepsilon \\ |s_2 - P_2| < \varepsilon \end{cases}$

Posons $U_1 = P_1 - \varepsilon$ et $U_2 = P_2 + \varepsilon$.

On a $U_1 \leq h \leq U_2$ et $\int_0^1 (U_2 - U_1) = \int_0^1 (P_2 - P_1) + 2\varepsilon$

$\int_0^1 (U_2 - U_1) \leq \int_0^1 P_2 - s_2 + s_2 - s_1 + s_1 - P_1 + 2\varepsilon \leq \int_0^1 |P_2 - s_2| + \int_0^1 s_2 - s_1 + \int_0^1 |s_1 - P_1| + 2\varepsilon$
$\leq 3\varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon$

On pose alors $\begin{cases} R_1(x) = x + x(1-x)\, U_1(x) \\ R_2(x) = x + x(1-x)\, U_2(x) \end{cases}$ et $Q(x) = U_2(x) - U_1(x) = \dfrac{R_2(x) - R_1(x)}{x(1-x)}$

On a alors $R_1(0) = R_2(0) = 0$, $R_1(1) = R_2(1) = 1$ et $R_1 \leq g \leq R_2$
avec $\int_0^1 Q \leq 5\varepsilon$. $\quad R_1, R_2 \in X\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{E}$ par ①.

4) Conclusion :

Par hypo, $\exists M$ tq $|a_n| \leq \frac{M}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0,1[$.

On a $\left| \sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) - \sum_{n \geq 0} a_n R_1(x^n) \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{premier terme nul}}}{\leq} \sum_{n \geq 1} |a_n| \underbrace{\left(g(x^n) - R_1(x^n)\right)}_{\leq (R_2 - R_1)(x^n) = x^n(1-x^n)Q(x^n)}$ (≥ 0)

$\leq M \sum_{n \geq 1} \dfrac{x^n(1-x^n)}{n} Q(x^n)$

Or $1 - x^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)(1-x) \leq (1-x) \times n$

$\leq M(1-x) \sum_{n \geq 1} x^n Q(x^n) \underset{\substack{\uparrow \\ x^0 Q(x^0) = Q(1) \geq 0}}{\leq} M(1-x) \sum_{n \geq 0} x^n Q(x^n)$

Donc $\left| \sum_{n \geq 0} a_n g(x^n) \right| \leq \left| \sum_{n \geq 0} a_n R_1(x^n) \right| + M(1-x) \sum_{n \geq 0} x^n Q(x^n)$

...is en passant à la lim on a :

$$\overline{\lim_{x\to 1^-}} \left|\sum_{n\geq 0}{}' a_n g(x^n)\right| \leq \underbrace{\overline{\lim_{x\to 1^-}} \left|\sum_{n\geq 0}{}' a_n R_1(x^n)\right|}_{=0 \text{ car } R_1 \in \overline{\Phi}} + \underbrace{\overline{\lim_{x\to 1^-}} M(1-x)\sum_{n\geq 0} x^n Q(x^n)}_{= M\int_0^1 Q(t)\,dt \text{ par Lm ②} \leq M\times 5\varepsilon}$$

$$\leq 5\varepsilon M.$$

valable $\forall \varepsilon > 0$. D'où : $0 \leq \underline{\lim_{x\to 1^-}} \left|\sum_{n\geq 0}{}' a_n g(x^n)\right| \leq \overline{\lim_{x\to 1^-}} \left|\sum_{n\geq 0}{}' a_n g(x^n)\right| = 0$

Donc $\overline{\lim} = \underline{\lim} = 0$ d'où $\lim_{x\to 1^-} \sum_{m\geq 0} a_n g(x^n) = 0$. ☐

Application 1 : Soit $F(x) = \ln(1+x) = -\sum_{m\geq 1}' \frac{(-x)^m}{m}$. On a $F(1^-) = \ln(2)$
donc $\sum_{m\geq 1}' \frac{(-1)^m}{m}$ converge vers $-\ln(2)$. $\left(R_{cv} = 1, \frac{(-1)^m}{m} = O\left(\frac{1}{m}\right)\right)$. ☐

Application 2 : Soit $F(x) = \arctan(x) = \sum_{k\geq 0}' \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$. On a $F(1^-) = \arctan(1) = \pi/4$
donc $\sum_{k\geq 0}' \frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi/4$. $\left(R_{cv} = 1, \frac{(-1)^k}{2k+1} = O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$ ☐

Application 3 : Pour tout $0 < t < 2\pi$, on a $\sum_{m\geq 1} \frac{\sin(mt)}{m} = \frac{\pi - t}{2}$.

Démo : $F_R(t) = \sum_{m\geq 1}' \frac{\sin(mt)}{m} R^m$.

Pour $R \in [0,1[$, on a cvn de la série car de $R_{cv} = 1$.

De plus, $F_R'(t) = \sum_{m\geq 1}' \cos(mt) R^m = \mathrm{Re}\left(\sum_{m\geq 1}' e^{imt} R^m\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}R}{1-Re^{it}}\right)$

$$= \frac{R\,\mathrm{Re}(e^{it}(1-Re^{-it}))}{1-2R\cos(t)+R^2} = \frac{R\cos(t) - R^2}{1-2R\cos(t)+R^2}.$$

Or $g_R(t) = \arctan\left(\frac{R\sin(t)}{1-R\cos(t)}\right)$ vérifie $g_R'(t) = F_R'(t)$. De plus, $g_R(0) = 0 = F_R(0)$
donc $F_R(t) = g_R(t)$. De plus, $\frac{\sin(mt)}{m} = O\left(\frac{1}{m}\right)$ donc d'après le thm de Hardy Littlewood,
$\sum_{n\geq 1}' \frac{\sin(mt)}{m}$ cv $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\sum_{m\geq 1}' \frac{\sin(mt)}{m} = \arctan\left(\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}\right)$
et $\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} = \frac{\sin(t)}{2\sin^2(t/2)} = \frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\sin^2(t/2)} = \frac{\sin(\pi/2 - t/2)}{\cos(\pi/2 - t/2)} = \tan(\pi/2 - t/2)$.

D'où $\sum_{m\geq 1}' \frac{\sin(mt)}{m} = \arctan(\tan(\pi/2 - t/2)) = \frac{\pi - t}{2}$ pour $0 < t < 2\pi$. ☐