Inégalité de Hoeffding

Ref : Ouvrard, Probabilités 2 (10.11.)

Thm : (X_n) v.a. réelles ⫫ et centrées. On suppose $|X_n| \leq c_n$, alors en notant $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ on a : $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$

Lem : Si X est une v.a.R centrée et bornée par 1 p.s alors $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dem du Lem : Soit $|x| \leq 1$. Par convexité de exp on a :

$$\exp(tx) = \exp\left(\frac{1-x}{2}\times(-t) + \frac{1+x}{2}\times t\right) \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t} \quad (*)$$

(car $\frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1$ et $\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2} \in [0,1]$).

Donc par hyp on peut appliquer $(*)$ d'où : $\exp(tX) \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}$.

En intégrant $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \frac{1-\mathbb{E}(X)}{2}e^{-t} + \frac{1+\mathbb{E}(X)}{2}e^{t} = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = ch(t)$ car X est centrée

Et $ch(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq e^{t^2/2}$ car $\frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{2^n n!}$ ($\leftarrow$ TG du DSE de $\exp(t^2/2)$)

en effet $\frac{1\times 2\times 3\times 4\times \cdots \times 2n}{2^n\times(1\times 2\times \cdots \times n)} \geq 1$.

Dem du thm : ① Majoration de $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon)$

$\forall t > 0 \quad \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{t\varepsilon}) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{t\varepsilon}}$ car $e^{tS_n} \geq 0$.

Et $\mathbb{E}(e^{tS_n}) \underset{⫫}{=} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_j})$

et $\mathbb{E}(e^{tX_j}) = \mathbb{E}\left(e^{c_j t \frac{X_j}{c_j}}\right) \leq e^{c_j^2 t^2/2}$ par le Lem

Donc $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq e^{\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n} c_j^2} e^{-t\varepsilon} = \exp\left(\frac{at^2}{2} - \varepsilon t\right)$ avec $a = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$

② Minimisation : $\frac{at^2}{2} - \varepsilon t$ atteint son min en $t_0 = \frac{\varepsilon}{a}$ et vaut donc $-\frac{\varepsilon^2}{2a}$.

D'où $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp(-\frac{\varepsilon^2}{2a})$.

On fait le même raisonnement avec $(-X_i)$, on trouve $\mathbb{P}(S_n < -\varepsilon) = \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \leq \exp(-\frac{\varepsilon^2}{2a})$

d'où $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(S_n < -\varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a}\right)$.

Corollaire : si $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \le n^{2\alpha-\beta}$ alors $\frac{S_n}{n^\alpha}$ cv ps vers 0.

Dem : Soit $\varepsilon > 0$. Par Hoeffding, $P(|S_n| \ge n^\alpha \varepsilon) \le 2\exp\left(\frac{-n^{2\alpha}\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$
$\le 2\exp\left(-\frac{n^\beta \varepsilon^2}{2}\right)$ et $= o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $\sum_{n \ge 1} P\left(\frac{|S_n|}{n^\alpha} \ge \varepsilon\right) < +\infty$.

Donc par Borel-Cantelli, $P\left(\underline{\lim} \left\{\frac{|S_n|}{n^\alpha} \le \varepsilon\right\}\right) = 1$ i.e. $\frac{|S_n|}{n^\alpha} \xrightarrow{ps} 0$. □

Rq : $X_n \xrightarrow{ps} X$ ssi $P\left(\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \ge n} \{|X_m - X| < \varepsilon\}\right) = 1$.
ssi $P\left(\bigcap_{k \ge 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \ge n} \{|X_m - X| < 1/k\}\right) = 1$
ssi $\lim_{k \to +\infty} P\left(\underline{\lim}_{n} \{|X_n - X| < 1/k\}\right) = 1$

Rq : On a $X \sim B(p)$:
- BT : $P(|S_n - np| \ge \sqrt{n}\varepsilon) \le \frac{np(1-p)}{n\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \le \frac{1}{4\varepsilon^2}$ pour avoir un IC sur p.
- $P(|S_n - np| \ge \sqrt{n}\varepsilon) \le 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$ Hoeffding car $|X_n - E(X_n)| = |X_n - p| \le 1$ IC sur p. $c_n = 1$.
- Hoeffding mieux que BT
- Pour les IC, on aime bien le TCL aussi.
- On a une généralisation de Hoeffding :

Prop - Rq : (Inégalité d'Azuma) (X_n) martingale issue de 0 dont on a $|X_n - X_{n-1}| \le c_n$ p.s $\forall n \ge 1$
Alors $\forall \varepsilon > 0$ $P(|X_n| \ge \varepsilon) \le 2e^{-\varepsilon^2/2\sigma_n^2}$ avec $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$.

Rq : En fait, on a mieux : $P(|S_n| \ge \varepsilon) \le 2\exp\left(\frac{-2\varepsilon^2}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right)$
mais c'est plus difficile

Contre ex si les va ne sont pas ⊥⊥ : $X \sim R(p)$ (n ≥ 2, sinon c'est vrai) $X_i = X$ $\forall i$, $S_n = nX$. Pour $\varepsilon = n^{3/4}$.

$P(|S_n| \ge \varepsilon) = P(|X| \ge \varepsilon/n) = P\left(|X| \ge \frac{1}{n^{1/4}}\right) = 1$. $E(X) = 0$. ok
Et $2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{n}\right) \underset{n=2}{\le} 2\exp\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}99 < 1$. $c_i \ge |X| = 1$
On pose $c_i = 1$

(en fait, $1 \le 2\exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$ ssi $n \le \ln(4)^2 \approx 1{,}92$)