Nombre d'involutions d'un ensemble fini

Contexte : Une méthode classique pour résoudre des récurrences consiste à utiliser les séries génératrices. Dans le cas des récurrences linéaires à coefficients constants, elles font le lien entre la forme générale des solutions des suites et des équations différentielles. Ici, on applique ce principe aux élements d'ordre 2 de $\mathfrak{S}_n$.

On pourrait aussi appliquer cette méthode aux : partitions d'un ensemble, arbres binaires, ...

Théorème 0.1. *On pose $\mathfrak{I}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma^2 = id\}$ et $I_n = |\mathfrak{I}_n|$. Alors :*

$$I_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k}$$

Démonstration. Déjà calculons les premières valeurs : $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$.

• Montrons que $\boxed{I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$.

On pose $\mathfrak{I}_n^{(k)} = \{\sigma \in \mathfrak{I}_n : \sigma(1) = k\}$ pour tout $k \in [1, \dots, n+1]$. Alors $\mathfrak{I}_n = \bigsqcup \mathfrak{I}_n^{(k)}$ et l'union est disjointe. Pour $k \geq 2$, on pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{n+1}^{(k)} : & \mathfrak{I}_{n+1}^{(k)} & \longrightarrow & \mathfrak{I}_{n-1} \\ & \sigma & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 & \cdots & \text{k-1} & \text{k+1} & \cdots & \text{n+1} \\ \sigma(2) & \cdots & \sigma(k-1) & \sigma(k+1) & \cdots & \sigma(n+1) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{n+1}^{(1)} : & \mathfrak{I}_{n+1}^{(1)} & \longrightarrow & \mathfrak{I}_{n} \\ & \sigma & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 & \cdots & \text{n+1} \\ \sigma(2) & \cdots & \sigma(n+1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrons que les $\varphi^{(k)}$ sont bien définies et bijectives. Montrons le seulement pour $k = 1$. Soit $\sigma \in \mathfrak{I}_{n+1}^1$. Alors $\sigma(i) \geq 2$ si $i \geq 2$. $\varphi^1(\sigma)^2(i) = \sigma^2(i) = i$ pour tout $i \geq 2$. Donc φ^1 est bien définie.

Soit σ et τ tels que $\varphi^{(1)}(\sigma) = \varphi^1(\tau)$. Alors pour tout i, $\sigma(i) = \tau(i)$. Donc $\sigma = \tau$. Donc φ^1 est injective.

Soit $\sigma \in \mathfrak{I}_n$. On pose $\tau = (1, \sigma(2), \cdots, \sigma(n+1))$ et on a bien $\varphi^1(\tau) = \sigma$.

On conclut alors par égalité des cardinaux.

• On pose $I_0 = 1$ et $F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ la série entière associée. Montrons que $\boxed{F' = (1+x)F}$.

Comme $I_n \leq n!$, alors le rayon de convergence de F est plus grand que 1. Soit $x \in]-1, 1[$, alors :

$$F'(x) = \sum_{n\geq 1} n\frac{I_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = F(x) + xF(x)$$

• Concluons. $F(0) = I_0/0! = 1$. De plus $\int_0^x 1 + tdt = x + x^2/2$. Donc par la théorie des équations différentielles linéaires,

$$F(x) = \exp(x + x^2/2)$$

Or exp est développable en série entière en 0.

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ et } \exp(x^2/2) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

Par produit de Cauchy :

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} (\sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{1}{2^k k!(n-2k)!}) x^n$$

Par unicité du développement on a :

$$I_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{1}{2^k k!(n-2k)!}$$

□

Références :

- Leichtmann : Oral X Tome 3 Analyse (page 103) : pour la méthode. Achtung le résultat présenté est faux !
- Flajolet, Sedgewick : Analytic Combinatorics (page 122) [rayon info] (pour le résultat)

Bonus : Dans Flajolet, il existe même un équivalent :

$$\frac{I_n}{n!} \sim \frac{e^{n/2-1/4} n^{-n/2}}{2\sqrt{\pi n}} e^{\sqrt{n}}$$

L'idée de la méthode est d'étudier finement la singularité en l'infini de la série génératrice F qui est holomorphe. En effet le théorème de Cauchy fait le lien entre f et les coefficients de la série.