Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre

Leçons : 102, 152, 181, 191, 226

Ref : Isenmann, Pecatte : l'oral pour l'agreg p 388 (2019) (Gourdon Algèbre + Caldero Voyage en algèbre) + 13 docs

Lem 1 : (déterminant circulant)

On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}}_{=: C} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$$

Démo : On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$

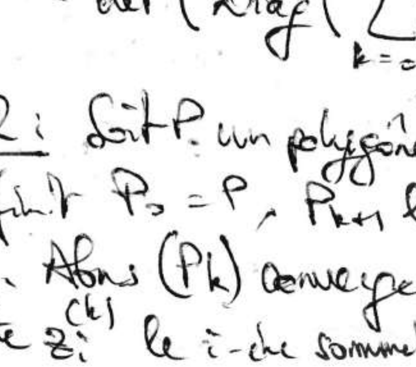
On va dz J pour dz C. On cherche λ et $X \neq 0$ tq $JX = \lambda X$

$X = (x_1, \dots, x_n)^T$ tq : $\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases} \Rightarrow \forall i \quad x_i = \lambda^n x_i$

On remarque que le vecteur $v_k := (1, \omega^k, \dots, \omega^{(n-1)k})$ est $\vec{vp}$ de J associé à la vp ω^k $\forall k$. Ainsi, J possède n vp distinctes, et donc est dz :
$\exists P \in GL_n$ tq $J = PDP^{-1}$, $D := \mathrm{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ d'où :

$$\det C = \det\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\Big) = \det\Big(P \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k P^{-1}\Big) = \det\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\Big)$$
$$= \det\Big(\mathrm{Diag}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{ik}\Big)_{0 \le i \le n-1}\Big) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}. \quad \square$$

Thm 2 : Soit P un polygone du plan complexe dont ses sommets sont $\{z_1, \dots, z_n\}$.
On définit $P_0 = P$, P_{k+1} le polygone qui a pour sommets les milieux des arêtes de P_k. Alors (P_k) converge vers l'isobarycentre de P.
On note $z_i^{(k)}$ le i-ème sommet du polygone P_k.



Démonstration : On pose $Z_k = (z_1^k, \dots, z_n^k)^t$. Mq (Z_k) cv vers ${}^t(g, \dots, g)$ où $g_0 = \text{Isobar}(P)$. On a alors $Z_{k+1} = AZ_k$ avec $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & & & 1/2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} (z_1^k + z_2^k)/2 \\ \vdots \\ (z_n^k + z_1^k)/2 \end{pmatrix}$$

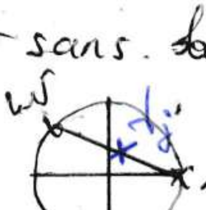
Ainsi $Z_k = A^k Z_0$. Or $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1/2 & -1/2 & & 0 \\ 0 & X-1/2 & \ddots & \\ & & \ddots & -1/2 \\ -1/2 & 0 & & X-1/2 \end{vmatrix}$

et vaut d'après le lemme :

$$\chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(X - \frac12 - \frac12 \omega^j\right) = \prod_{j=0}^{n-1}(X - \lambda_j) \quad \text{avec } \lambda_j = \frac12(1+\omega^j)$$

$\lambda_i = \lambda_j$ ssi $i = j$ donc χ_A est sans. donc A est dz.

Or $\forall j \geq 1$ $|\lambda_j| < 1$



Ainsi $A^k \sim \begin{pmatrix} \lambda_0^k & & \\ & \lambda_1^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ et alors $A^k \longrightarrow A_\infty = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$

Ainsi, $Z_k \to A_\infty Z_0 := Z$.

Z vérifie $Z = AZ$ car $Z_{k+1} = AZ_k$ et l'appli $X \mapsto AX$ est C^0 car linéaire en dim finie

ie $Z \in E_1(A) = \text{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$ (dim $= 1$ car A est stochastique) donc $Z = {}^t(a, \dots, a)$, $a \in \mathbb{C}$.

Mq a est l'isobarycentre de P. Pour cela, mq le barycentre reste identique.

$g_k = \text{isobar}(Z_k)$

$$g_{k+1} = \frac1n \sum_{j=1}^{n} z_j^{(k+1)} = \frac1n \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^{(k)} + z_{j+1}^{(k)}}{2} = \frac{1}{2n}(g_k n + n g_k) = g_k.$$

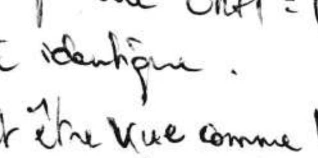
Donc $g_k = \dots = g_0$.

$$\underset{g_0}{\overset{\shortparallel}{g_k}} = \frac1n \underbrace{\sum_{j=1}^{n} z_j^{(k)}}_{\xrightarrow[k \to +\infty]{} a} \to a \quad \text{donc } g_0 = a$$

ie $Z = {}^t(g_0, \dots, g_0)$ □.

Rq3 : On peut prendre $Z_{k+1} = (\lambda z_1^{(k)} + (1-\lambda) z_2^{(k)}, \dots, \lambda z_n^{(k)} + (1-\lambda) z_1^{(k)})$ $0 < \lambda < 1$ et tout reste identique.

Rq4 : A peut être vue comme la matrice de transition de la chaîne de Markov dont le graphe est :



c'est une chaîne irréductible qui a un nombre fini d'état donc a une unique mesure invariante (avec le barycentre !) et il y a cv en loi vers cette mesure invariante.