Convergence de méthodes itératives   Ciarlet p19 → 22 + p98

Ref : Dumas, Modélisation à l'oral de l'agrégation p167

Leçons : 148, 157, 162, 226, 149

On s'intéresse au système $Ax=b$. $A\in GL_n(\mathbb{R})$ et $b\in\mathbb{R}^n$.

Def 1 : On suppose $A=M-N$ avec $M\in GL_n$, $N\in \mathcal{M}_n$. La méthode itérative associée à (M,N) converge si toute suite récurrente $u_{k+1}=M^{-1}(Nu_k+b)$ pour $k\geq 0$ et $u_0\in\mathbb{R}^n$ converge vers u tq $Au=b$.

Thm 2 : La méthode associée à (M,N) cv ssi $\rho(M^{-1}N)<1$.

Lm 3 : Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon>0$, $\exists\ \|\cdot\|$ subordonnée tq $\|A\|\leq\rho(A)+\varepsilon$.

Dem du Lm 3 : On trigonalise A dans $\mathbb{C}$. $\exists P\in GL_n$ tq $A=PTP^{-1}$.

Notons $D_\delta=\mathrm{Diag}(1,\delta,\dots,\delta^{n-1})$.

$$D_\delta^{-1}TD_\delta=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \delta^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta^{1-n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ & \ddots & & t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & t_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \delta & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_{11} & \delta t_{12} & \cdots & \delta^{n-1}t_{1n}\\ & \ddots & & \delta^{n-2}t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & t_{n,n}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\delta^{j-i}t_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}=:T_\delta.$$

On définit $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|=\|(PD_\delta)^{-1}x\|_\infty$ et on note $|||\cdot|||$ la norme subordonnée associée. On $|||B|||=\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}=\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\dfrac{\|(PD_\delta)^{-1}Bx\|_\infty}{\|(PD_\delta)^{-1}x\|_\infty}\underset{y=(PD_\delta)^{-1}x}{=}\sup\limits_{\|y\|_\infty\leq 1}\dfrac{\|(PD_\delta)^{-1}BPD_\delta y\|_\infty}{\|y\|_\infty}$

$$=\|(PD_\delta)^{-1}BPD_\delta\|_\infty$$

Or $|||B|||_\infty=\sup\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^n|b_{ij}|$. Ainsi, pour $\delta>0$ tq $\forall i\ \sum\limits_{j=i+1}^n\delta^{j-i}|t_{ij}|<\varepsilon$ alors :

$$|||A|||=\|D_\delta^{-1}P^{-1}APD_\delta\|_\infty=\|D_\delta^{-1}TD_\delta\|_\infty=\|T_\delta\|_\infty=\sup_i\sum_{j=1}^n\delta^{j-i}|t_{ij}|$$

$$\underset{(t_{ij})_{i>j}=0}{=}\sup_i\Big(|t_{ii}|+\sum_{j>i}\delta^{j-i}|t_{ij}|\Big)\leq\rho(A)+\varepsilon.\quad\square$$

Dém du thm 2 : Soit u tq $Au=b \Leftrightarrow Mu=Nu+b$. Notons $e_k=u_k-u$ l'erreur.

Alors $e_{k+1}=M^{-1}(Nu_k+b)-M^{-1}Nu-M^{-1}b=M^{-1}Ne_k \Rightarrow e_k=(M^{-1}N)^ke_0$.

- Si $\rho(M^{-1}N)<1$ alors par le Lm, $\exists\|\cdot\|$ tq $\|M^{-1}N\|<1$, donc $\|e_k\|\leq\|(M^{-1}N)^k\|\|e_0\|\leq\|M^{-1}N\|^k\|e_0\|\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $u_k\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}u$.
- Si $\rho(M^{-1}N)\geq 1$, $\exists\lambda$ v.p $\in\mathbb{C}$, $|\lambda|\geq 1$, et $v=v_1+iv_2$ son vp associé. On a : $(M^{-1}N)^kv=\lambda^kv$ donc la méthode ne cv pas pour $u_0=u+v_1$ ou $u_0=u+v_2$. En effet $e_k=\mathrm{Re}(\lambda^kv)$, $e_k=(M^{-1}N)^ke_0=(M^{-1}N)^k(u_0-u)=(M^{-1}N)^k\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\lambda^kv)\\ \mathrm{Im}(\lambda^kv)\end{pmatrix}$, et $\lambda^kv\not\to 0$. donc soit sa partie réelle, soit sa partie imaginaire tend pas vers 0. Donc $e_k\not\to 0$.

Déf 4 : (méthodes) Soit $A \in GL_n$, tq $a_{ii} \neq 0$ $\forall i$, $D = \mathrm{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, $-E = (a_{ij} \mathbb{1}_{i>j})$ et $-F = (a_{ij} \mathbb{1}_{i<j})$ les parties diag, triang inf strict, triang sup strict. Méthodes de :

* Jacobi : $M = D$ et $N = D - A$ et on pose $J = D^{-1}(D-A)$
* Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$ et on pose $L_1 = (D-E)^{-1}F$

Prop 5 : Si A est tridiagonale alors $\rho(L_1) = \rho(J)^2$.

Dem : On pose $A(\mu) = \begin{pmatrix} a_1 & \mu^{-1}c_2 & & 0 \\ \mu b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mu^{-1}c_n \\ 0 & & \mu b_n & a_n \end{pmatrix}$ $(\mu \neq 0)$ où $A(1) = A$.

On nq si $Q(\mu) = \mathrm{Diag}(1, \mu, \dots, \mu^{n-1})$

on a $A(\mu) = Q(\mu) A Q(\mu)^{-1}$ et donc $\det(A(\mu)) = \det(A)$.

Les vp de J sont racines de χ_J ie de $\det(XI_n - J) = \det(XD - DJ)$ (×$\det D \neq 0$)

$= \det(XD - D + A) = \det(XD - E - F)$. ($A = D - E - F$)

De même, les vp de L_1 sont racines de χ_{L_1} soit $\det(XI_n - L_1) = \det(X(D-E) - F)$ (×$\det(D-E) \neq 0$)

$= \det(XD - XE - F)$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\chi_{L_1}(\lambda^2) = \det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F) = \lambda^n \det(\lambda D - \lambda E - \lambda^{-1} F)$

$= \lambda^n \det(\lambda D - E - F)$ d'après le calcul avec $A(\mu)$.

$= \lambda^n \chi_J(\lambda)$. Donc $Sp(L_1) \setminus \{0\} = Sp(J)^2 \setminus \{0\}$

En particulier $\rho(L_1) = \rho(J)^2$. $\square$

Rappel 6 : $|||A|||_\infty = \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

On a $\|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, \|x\|_\infty$.

d'où $|||A||| \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. On pose x tq $x_j = \frac{a_{i_0 j}}{|a_{i_0 j}|}$ si $a_{i_0 j} \neq 0$, 1 sinon

Alors $\|x\|_\infty = 1$ où on a choisit i_0 tq $\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Ainsi, $\|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \ge \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0, j}| = \left(\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty$

donc $|||A||| \ge \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ $\square$.