Théorème de Kronecker :

Ref : Queffélec - Queffélec, Analyse complexe et applications (p44).

Def : On appelle polynôme symétrique élémentaire σ_k :

$$\sigma_k(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_k} = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} X_i$$

Prop : A anneau commutatif. L'anneau $A_\sigma[X_1, \dots X_n]$ des polynômes symétriques (ie invariant par permutation des variables) est engendré par la famille $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ qui est algébriquement libre sur A.

Lm : Les polynômes cyclotomiques Φ_n vérifient :

i) $\prod_{d|n} \Phi_d(z) = z^n - 1$ ii) $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et $\deg(\Phi_n) = \varphi(n)$

iii) Φ_n est unitaire, irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et si $n \geq 2$ alors $\Phi_n(0) = 1$.

Théorème (Kronecker) : Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (non constant) avec $P(0) \neq 0$. On a l'équivalence :

P a ses racines de module ≤ 1 ssi P est un polynôme cyclotomique.

Dem : $[\Leftarrow]$ Les racines d'un poly cyclo sont des racines de l'unité donc de module 1. Notons que les poly cyclo $\in \mathbb{Z}[X]$, sont unitaires et irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

$[\Rightarrow]$ Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire irré dans $\mathbb{Q}[X]$ tq $P(0) \neq 0$, non constant et de racines de module ≤ 1. On note $P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$ où $z_1, \dots, z_n$ sont les racines comptées avec multiplicité. Par hypo, on a $\max_{1 \leq k \leq n} |z_k| \leq 1$.

① Nombre fini de polynômes :

On a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \sigma_{n-k} X^k$. On a pour $1 \leq p \leq n$:

$$|\sigma_p| \leq \Big| \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| = p}} \prod_{i \in I} z_i \Big| \leq \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| = p}} 1 \underset{\substack{\text{nombre de parties à} \\ p \text{ éléments de } \{1, \dots, n\}}}{=} \binom{n}{p}$$

Donc l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ de degré n à racines dans le disque unité fermé est fini. On note cet ensemble F_n.

② Stabilité du polynôme : Mq $\forall j$ $P_j(X) = (X - z_1^j) \dots (X - z_n^j) \in F_n$.

Chaque P_j est un polynôme unitaire de degré n à racines dans le disque unité fermé. Reste à mq ils sont dans $\mathbb{Z}[X]$.

D'après les relations coeffs-racines, le coeff devant X^k dans P_j est :
$(-1)^{m-k}\sigma_{m-k}(z_1^j, \dots, z_m^j)$ et $\sigma_{n-k}(X_1^j, \dots, X_n^j)$ est un polynôme à coeffs dans $\mathbb{Z}$ symétrique en $X_1, \dots, X_m$: c'est donc un poly. à coeffs entiers en les poly sym élémentaires $\sigma_i(X_1, \dots, X_m)$. Ainsi $\sigma(z_1^j, \dots, z_n^j)$ est un poly à coeffs entiers en les $\sigma_i(z_1, \dots, z_n)$ qui sont eux-mêmes des entiers. D'où $P_j \in \mathbb{Z}[X]$
Et donc $P_j \in F_n$.

3) Conclusion :

L'ensemble E des racines de tous les polynômes de F_n est fini (car nb de racines et F_n finis)
En part, $\forall k$ puisque $z_k, z_k^2, \dots \in E$, $\exists j \neq l$ tq $z_k^j = z_k^l$
Et comme $z_k \neq 0$ ($P(0) \neq 0$), z_k est une racine d_k-ième de l'unité avec $d_k = |j-l|$.
Si $N = d_1 \times \dots \times d_m$, les z_k sont toutes des racines N-ièmes de l'unité.
Donc $P \mid (X^N - 1)^m = \left(\prod_{d \mid N} \Phi_d(X)\right)^m$, $m = \deg P$
Comme Φ_d sont irréductibles unitaires, ainsi que P, cela fournit que P doit être un de ces facteurs irréductibles : $\exists d \mid N$ tq $P = \Phi_d$. (Lemme de Gauss + factorialité de $\mathbb{Q}[X]$).

Corollaire : $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire non constant : [BOUT].

P a toutes ses racines de module ≤ 1 ssi $P = X^p \prod_{k=1}^{q} \Phi_{d_k}$ où $p, q \in \mathbb{N}$ et $d_1, \dots d_q \in \mathbb{N}^*$

Dem : $\Leftarrow$ La réciproque est immédiate car les zéros des poly cyclo sont des racines de l'unité et 0 est racine de X^p, $p \geq 1$.
$\Rightarrow$ Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire (non constant) a toutes ses racines de module ≤ 1, on peut écrire P sous la forme $X^p Q$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tq $Q(0) \neq 0$.
Comme $\mathbb{Z}[X]$ est factoriel, $Q = P_1 \dots P_q$ avec $P_i \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire irréductible dont toutes les racines sont de module ≤ 1. D'après le th de Kronecker, $\forall i\ \exists d_i$ tq $P_i = \Phi_{d_i}$.