Topologie matricielle

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Groupes linéaires

<u>Prop 1</u> : $SL_n(K)$ est fermé, d'intérieur vide, non borné et connexe par arcs.

<u>Dem</u> : 1) $\det^{-1}\{1\}$

2) Si $M_k = M - 2^{-k} I_n \to M$. $(\det(M_k))_k$ ne peut prendre qu'un nb fini de fois la valeur 1 sinon $1 = \det(M_k) = \chi_M(2^{-k})$ serait constant alors qu'il est de degré n. Donc pour $k \gg 1$, $M_k \notin SL_n(K)$ donc $M \notin \mathring{SL_n}(K)$

3) $\mathrm{Diag}(k, \frac{1}{k}, 1, \dots, 1) \in SL_n(K)$ et est non borné.

4) Les matrices de transvections engendrent $SL_n(K)$ donc $M \in SL_n(K)$ s'écrit $M = T(\lambda_1)\dots T(\lambda_k)$. On définit $\gamma : [0,1] \to SL_n(K)$; $\gamma(t) = T(t\lambda_1)\dots T(t\lambda_k)$, $\gamma(0) = I_n$, $\gamma(1) = M$ et $\gamma(t) \in SL_n(K)$.

<u>Prop 2</u> : $GL_n(K)$ est ouvert, dense et non borné.

<u>Dem</u> : 1) $\det^{-1}(K^*) = GL_n(K)$

2) $M_k = M - 2^{-k} I_n \to M$. $(\det(M_k))$ ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois car $\det M_k = \chi_M(2^{-k}) = 0$ et $Sp(M)$ est fini. Donc pour $k \gg 1$, $M_k \in GL_n(K) \to M \in \overline{GL_n}(K)$.

3) $SL_n \subset GL_n$ et SL_n n'est pas borné : GL_n non plus.

<u>Prop 3</u> : i) $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
ii) $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe : ses deux composantes connexes sont $GL^+(\mathbb{R})$ et $GL^-(\mathbb{R})$.

<u>Dem</u> : $M, N \in GL_n(\mathbb{C})$

i) $\forall z \in \mathbb{C}$ $\chi(z) = \det(zM + (1-z)N)$ non identiquement nulle car $\chi(0) = \det(N) \neq 0$ et est polynomiale. Elle s'annule donc sur un ensemble fini X. $\chi(1) = \det(M) \neq 0$

Et $\mathbb{C} \setminus X$ est connexe par arcs donc $\exists \alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus X$ cont tq $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(1) = 1$

On pose $\gamma(t) = \alpha(t) M + (1-\alpha(t))N \in GL_n(\mathbb{C})$ continue. $\gamma(0) = M$, $\gamma(1) = N$.

ii) Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe alors $\det(GL_n(\mathbb{R}))$ aussi (C^0) $= \mathbb{R}^*$. Absurde.

Soit $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, \det(M))$: $MD^{-1} \in SL_n$ donc $MD^{-1} = S \in SL_n$

Par connexité de SL_n on a $\alpha(0) = S$, $\alpha(1) = I_n$. On pose $\gamma(t) = \alpha(t)(tI_n + (1-t)D)$

$\gamma \in C^0$; $\gamma(0) = SD = M$; $\gamma(1) = \alpha(1) = I_n$; et $\gamma(t) \in GL_n^+$ car $\det(\gamma) = (1-t)\det(M) + t > 0$

Autrement dit, $\gamma(t) = \alpha(t)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & t + (1-t)\det M \end{pmatrix}$. Pour $GL_n^-(\mathbb{R})$ on relie à $J = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}$. $\det(\gamma) = (1-t)\det M - t < 0$

II) Ensembles de matrices de rang fixé

On note $\mathcal{J}_R(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ rg(M) = R\}$ $R = m$ cf I.

Prop 4 : Soit $R \in [\![0, n-1]\!]$. On a :
i) $\mathcal{J}_R(\mathbb{K})$ est non bornée ii) d'intérieur vide iii) $\overline{\mathcal{J}_R(\mathbb{K})} = \bigcup_{k=0}^{R} \mathcal{J}_k(\mathbb{K})$
iv) connexe par arcs.

Dem : i) $M = \begin{pmatrix} kI_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non bornée. ii) $\mathcal{J}_R(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$

donc $\mathring{\mathcal{J}}_R(\mathbb{K}) \in \mathring{\overline{\mathcal{M}_n / GL_n}} = \mathcal{M}_n / \overline{GL_n} = \mathcal{M}_n/\mathcal{M}_n = \emptyset$.

iii) $\boxed{\supset}$ Soit M $rg(M) = s \leq R$. Alors $\exists P, Q$ tq $M = P J_s Q$. $M = \lim_k P \underbrace{\begin{pmatrix} I_s & & \\ & 2^{-k} I_{R-s} & \\ & & 0_{n-R} \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{J}_R} Q \in \overline{\mathcal{J}_R(\mathbb{K})}$.

$\boxed{\subset}$ Soit $(M_k) \subset \mathcal{J}_R(\mathbb{K})$
$M_k \to M \in \overline{\mathcal{J}_R(\mathbb{K})}$
Mq $M \in \bigcup_{k \leq R} \mathcal{J}_k$. Δ_J = mineur de taille $|J|$. Pour $J \subset [\![1, n]\!]$ tq $|J| = R+1$ on a :
$\Delta_J(M) = \lim_{k \to +\infty} \Delta_J(M_k) = 0$ car $rg M_k = R < R+1$ donc $rg(M) < R+1$
donc $M \in \mathcal{J}_k(\mathbb{K})$ pour $k \leq R$.

iv) $\varphi : GL_n(\mathbb{C})^2 \to \mathcal{J}_R(\mathbb{C})$, $(P, Q) \mapsto P J_R Q$. $\underbrace{\varphi(GL_n(\mathbb{C})^2)}_{= \mathcal{J}_R(\mathbb{C})}$ est connexe par arcs car $\varphi \in C^0$ et $GL_n(\mathbb{C})^2$ est connexe par arcs.

. De même avec $GL_n^+(\mathbb{R})^2$. Reste à mq $\varphi(GL_n^+(\mathbb{R})^2) = \mathcal{J}_R(\mathbb{R})$.

$\boxed{\subset}$ trivial $\boxed{\supset}$ $M = P J_R Q = \hat{P} J_R \hat{Q}$ avec $\hat{P} = P\,\mathrm{Diag}(I_{n-1}, \det(P)) \in GL_n^+(\mathbb{R})$
$\hat{Q} = \mathrm{Diag}(I_{n-1}, \det(Q))\, Q$ $\square$

Rq : $\mathcal{J}_R$ fermé ssi $R = 0$, ouvert ssi $R = n$.

III) Groupes orthogonaux et unitaires :

Prop 5 : i) $O_n(\mathbb{R})$ est compact d'intérieur vide,
ii) $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe : 2 composantes : $O_n^+(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

Dem : i) $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ $\varphi : M \mapsto {}^tMM$, $\in C^0$. fermé.
De plus, les colonnes font une bon donc les coeffs de M sont dans $[-1,1]$: borné
$O_n(\mathbb{R}) \subset \underbrace{SL_n(\mathbb{R})}_{\text{intérieur vide}} \cup \underbrace{\det^{-1}\{-1\}}_{\text{pareil (même dém)}}$ donc $\mathring{O}_n(\mathbb{R}) = \emptyset$.

ii) Si $O_n(\mathbb{R})$ connexe alors $\det(O_n(\mathbb{R}))$ aussi ie $\{\pm 1\}$. Absurde. Donc $O_n(\mathbb{R})$ pas connexe.
Mq $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs : $M = P \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{\theta_k} & \\ & & & I_{n-2k} \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $P \in O_n(\mathbb{R})$
$\gamma : [0,1] \to SO_n(\mathbb{R})$ $\gamma(t) = P\,\mathrm{Diag}(R_{\theta_1 t}, \dots, R_{\theta_k t}, I_{n-2k}) P^{-1}$ $\gamma(0) = I_n$ $\gamma(1) = M$
$\det \gamma = 1$. $\gamma \in C^0$.
On fait la même chose pour $O_n^-(\mathbb{R})$ en reliant à $\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, -1)$ $I_{n-2k} \mapsto (I_{n-2k-1}, -1)$ $\square$

Prop 6 : $SO_n(\mathbb{R})$ est i) compacte ii) d'intérieur vide iii) connexe par arcs

Dem : i) $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$ est compact (intersection entre un compact et un fermé)
ii) $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$ donc $\mathring{SO_n}(\mathbb{R}) \subset \mathring{O_n}(\mathbb{R}) = \emptyset$. iii) déjà vu. □

Prop 7 : $U_n(\mathbb{C})$, $SU_n(\mathbb{C})$ sont compactes, d'intérieurs vides et connexes par arcs.

Dem : i) $U_n(\mathbb{C}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ $\varphi : M \mapsto M^*M$. $|m_{ij}| \leq 1$ donc $U_n(\mathbb{C})$ compact.
. $SU_n = U_n \cap SL_n$ compact $\cap$ fermé est compact

ii) . $SU_n \subset U_n \subset \{M, |\det M|^2 - 1 = 0\} = Z$. La partie Z est l'ensemble des zéros d'un poly complexe à $2m^2$ indéterminées donc $\mathring{Z} = \emptyset$. Donc SU_n et U_n aussi.
(réelle et Im)

iii) . $U_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs : $M = P\,\mathrm{Diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})\,P^{-1}$, $P \in U_n(\mathbb{C})$.
$\gamma(t) = P\,\mathrm{Diag}(e^{i\theta_1 t}, \dots, e^{it\theta_n})P^{-1}$, $\gamma(0) = I_n$, $\gamma(1) = M$, $\gamma(t) \in U_n(\mathbb{C})$, $\gamma \in C^0$.
. Pareil avec $\theta_1 + \dots + \theta_m = 0$ pour être dans $SU_n(\mathbb{C})$. □

IV. Matrices diagonalisables

$D_n(K) = \{M, M$ est diag$\}$ $T_n(K) = \{M, M$ est trig$\}$
$B_m(K) = \{M, \#Sp(M) = m\}$

On a $B_m \subset D_m \subset T_m$

Prop 8 : B_m, D_n et T_m sont connexes par arcs, ils sont non bornés.

Dem : i) Ces trois ensembles sont étoilés par rapport à la matrice nulle ($tM \in \dots$)
ii) $M_k = \mathrm{Diag}(1^k, 2^k, \dots, m^k) \in B_m$ $\forall k$. donc B_m est non bornée donc les autres aussi. □

Lm : $P_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X]$, P a n racines simples$\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$

Dem : $x_1 < \dots < x_m$ les racines $(a_0, \dots, a_n)$ tq $a_0 < x_1 < a_1 < x_2 < \dots < x_m < a_n$
$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ $\varphi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est C^0.
P change de signe en chacune de ses racines : $P \in \varphi^{-1}\left(\prod_{i=0}^{n} (-1)^i \mathbb{R}_+^*\right) \cup \varphi^{-1}\left(\prod_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \mathbb{R}_+^*\right) = U$
U est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$ comme image réciproque d'ouvert par $\varphi \in C^0$ et par union
Et un poly dans U est sans car change $(n+1)$ fois de signe sur $\mathbb{R}$ donc $U \subset P_n$. □

Prop 9 : $\mathring{D_n}(K) = B_n(K)$: c'est un ouvert.

i) $B_n(\mathbb{R})$ est ouvert : $\chi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_n[X]$ $\chi(M) = \chi_M$ est C^0. $B_n(\mathbb{R}) = \chi^{-1}(P_n)$ donc ouvert
ii) sur $K = \mathbb{C}$ on utilise le résultant pour avoir que $B_n(K)$ est ouvert
iii) $M \in D_n(K) \setminus B_n(K)$: $M = P\,\mathrm{Diag}(\lambda I_2, D)P^{-1}$ car il y a au moins une vp de mult ≥ 2.
On pose $M_k = P\,\mathrm{Diag}(\lambda I_2 + 2^{-k}E_{1,2}, D)P^{-1} \to M$ alors que $M_k \notin D_n(K)$ $\forall k$ donc $M \notin \mathring{D_n}(K)$.
(bloc trivial) (contraposée) □

Prop 10 : $\mathring{T_n}(\mathbb{R}) = B_n(\mathbb{R})$

Dem : . $B_n(\mathbb{R})$ est un ouvert. Soit $M \in T_n(\mathbb{R}) \setminus B_n(\mathbb{R})$, $M = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_2 + \varepsilon E_{1,2}, T)P^{-1}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$

$M_k = P\,\mathrm{Diag}\left(\lambda_2 I_2 - 2^{-k\varepsilon} N + N \begin{cases} 2^{-k} & \text{si } \varepsilon = 0 \\ 1 & \text{si } \varepsilon = 1 \end{cases}, T\right)P^{-1}$ $\in T_n^+(\mathbb{R})$.

$M_k \notin T_n(\mathbb{R})\ \forall k$ et $M_k \to M$ donc $M \notin \mathring{T_n}(\mathbb{R})$. Par contraposée $\mathring{T_n}(\mathbb{R}) \subset B_n(\mathbb{R})$ - réciproque triviale.

Prop 11 : $\overline{B_n(K)} = \overline{D_n(K)} = T_n(K)$, $T_n(K)$ est fermé.

Dem : • Mq $T_n(K)$ est fermé. si $K = \mathbb{C}$ $T_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$ ok.

si $K = \mathbb{R}$: Soit $M_k \in T_n \to M$. Mq $M \in T_n$. Soit $\lambda \in Sp(M)$, $\lambda_k \in Sp(M_k)$ tq $|\lambda_k - \lambda|$ soit minimal. On a $|\chi_{M_k}(\lambda)| \geq |\lambda - \lambda_k|^n \geq 0$ $\quad \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

On $\lim_{k \to +\infty} \chi_{M_k}(\lambda) = \chi_M(\lambda) = 0$ donc $\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda_k} \to \lambda \in \mathbb{C}$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ donc $M \in T_n(\mathbb{R})$.

• Soit $M \in T_n(K)$, $M = P\left(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + T\right)P^{-1}$ où $T \in T_n^{++}(\mathbb{R})$. (triup strict)

On choisit $\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_i = \lambda_j\ \forall i,j \\ \inf|\lambda_i - \lambda_j| & i \neq j \end{cases}$ On a $\#\{\lambda_i + \frac{\alpha}{ik}, i \in [\![1,n]\!]\} = n$

Donc $\underset{\in B_n}{M_k} = P\left[\underline{\mathrm{Diag}(\lambda_1 + \frac{\alpha}{k}, \dots, \lambda_n + \frac{\alpha}{nk})} + T\right]P^{-1} \to M \in T_n(K)$ donc $T_n(K) \subset \overline{B_n(K)}$

Donc $T_n(K) \subset \overline{B_n(K)} \subset \overline{D_n(K)} \subset \overline{T_n(K)} \underset{\text{fermé}}{=} T_n(K)$ donc les inclusions sont des égalités.

Rq : (Cayley-Hamilton) On a $\chi_M(M) = 0\ \forall M \in D_n(\mathbb{C})$. De plus $M \mapsto \chi_M(M)$ est polynomiale donc C^0, et $\overline{D_n(\mathbb{C})} = T_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$ on a $\chi_M(M) = \lim_{k \to +\infty} \chi_{M_k}(M_k) = \lim_{k \to +\infty} 0 = 0$. $\forall M \in M_n(\mathbb{C})$.

V - Topologie et réduction

$S_K(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n\}$

Prop 12 : $\mathring{S_K}(M) = \emptyset$

Dem : $S_K(M) \subset \{A, Tr(A) = Tr(M)\}$ hyperplan : il est d'intérieur vide (toujours fermé d'intérieur vide comme sev de E)

Prop 13 : $S_{\mathbb{C}}(M)$ est connexe par arcs.

Dem : $\varphi(P) = PMP^{-1}$ est C^0 $\varphi : GL_n \to M_n$ $\varphi(\underset{\text{connexe par arcs}}{GL_n}) = S_{\mathbb{C}}(M)$.