243, 261, (235), (250), (264), (265)

Jérémy Bettinger

Barbe-Ledoux (p 64-67)

Le problème des moments

Def 1: Soit μ mesure de proba sur $\mathbb{R}$. On définit les moments absolus et moments respectivement par : $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} |x|^n d\mu(x)$, $m_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$.
On les supposera tous finis.

Lm 2: La fonction caractéristique φ de la loi μ vérifie :
$$\varphi^{(k)}(t) = \frac{\partial}{\partial^k}\int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} d\mu(x).$$
En particulier, $\varphi^{(k)}(0) = i^k m_k$. Et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Dem : Théorème de régularité sous l'intégrale et majoration $|(ix)^k e^{itx}| \leq |x|^k \in L^1(d\mu)$ car on suppose $m_k < +\infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Thm 3 : Si $\overline{\lim_m} \left(\frac{\mu_m}{m!}\right)^{1/m} < +\infty$ alors μ est caractérisée par ses moments.

Dem : but : développer φ en série entière et montrer qu'elle est analytique puis appliquer le théorème d'égalité.

- Etape 1 : Taylor avec reste intégral.

On fixe $t, x \in \mathbb{R}$. On applique la formule de Taylor à $s \mapsto e^{isx} \in C^\infty$ entre 0 et $h \in \mathbb{R}$.
$$e^{ixh} = \sum_{k=0}^m \frac{(ix)^k}{k!} h^k + \int_0^h \frac{(h-s)^m}{m!} (ix)^{m+1} e^{isx} ds$$
et en multipliant par e^{itx} : $e^{ix(h+t)} = \sum_{k=0}^m \frac{(ix)^k}{k!} h^k e^{itx} + \int_0^h \frac{(h-s)}{m!}(ix)^{n+1} e^{ix(s+t)} ds$

En intégrant sur $\mathbb{R}$ par μ : (cf Lm2)
$$\varphi(t+h) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!} h^k + \int_{\mathbb{R}} \int_0^h \frac{(h-s)}{m!} (ix)^{n+1} e^{ix(s+t)} ds\, d\mu(x).$$

Par inégalité triangulaire et Fubini on obtient :

$$\left|\varphi(t+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!}h^k\right| \le \int_{\mathbb{R}}\int_0^{|h|}\frac{|h-s|^n}{n!}|x|^{n+1}\,ds\,d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{\le} \int_0^{|h|}\frac{|h-s|^n}{n!}\mu_{n+1}\,ds$$

Ops $h \geq 0$, c'est pareil pour $h \leq 0$.

$$= \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}\mu_{n+1} \qquad (*)$$

• Etape 2 : Notons $R = \overline{\lim}\left(\frac{\mu_n}{n!}\right)^{1/n} < +\infty$.

Donc $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \left(\frac{\mu_n}{n!}\right)^{1/n} \le R+1$ ie $\mu_n \le n!\,(R+1)^n$

On choisit $|h| \le \frac{1}{2(R+1)}$. On obtient alors

$\forall n \geq N \quad \frac{\mu_n |h|^n}{n!} \le |h|^n (R+1)^n \le \frac{1}{2^n}$

$(*)$ donne : $\left|\varphi(t+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!}h^k\right| \le \frac{1}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour $|h| \le \frac{1}{2(R+1)}$.

cela donne :

$$\forall |h| \le \frac{1}{2(R+1)},\ \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t+h) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!}h^k$$

ie φ est analytique sur $\mathbb{R}$.

• Etape 3 : Conclusion En $t=0$ on obtient :

$$\varphi(h) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}h^k \overset{\text{Lm 2}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^k m_k}{k!}h^k.$$

Si μ et ν sont 2 lois de proba de moments respectifs (m_k) et $(\tilde{m}_k)$ égaux, on a alors $\varphi_\mu(h) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^k m_k}{k!}h^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^k \tilde{m}_k}{k!}h^k = \varphi_\nu(h)$ pour $|h| \le \frac{1}{2(R+1)}$

ie les fonctions caractéristiques coïncident au voisinage de 0 et sont analytiques (étape 2) donc sont égales sur le domaine $\mathbb{R}$. Les fonctions caractérisent la loi (inversion de Fourier) donc $\underline{\mu = \nu}$. $\boxtimes$

Corollaire 4 : Si il existe $\alpha > 0$ tq $\mathbb{E}(e^{\alpha|X|}) < +\infty$ alors φ est analytique et alors μ est caractérisée par ses moments.

Dém : Soit $|h| < \alpha$. Par le théorème de convergence monotone :

$$\mathbb{E}(e^{|hX|}) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} \frac{|h|^k |X|^k}{k!}\Big) = \sum_{k\geq 0} \frac{|h|^k}{k!} \mathbb{E}(|X|^k) = \sum_{k\geq 0} \frac{\mu_k}{k!}|h|^k \quad (**)$$

D'après la formule de Cauchy-Hadamard, la série entière de droite a pour rayon de convergence R tq $R^{-1} = \overline{\lim_k} \left|\frac{\mu_k}{k!}\right|^{\frac{1}{k}} = \overline{\lim_k}\left(\frac{\mu_k}{k!}\right)^{\frac{1}{k}}$

Or le membre de gauche de $(**)$ est fini pour $|h| < \alpha$.

Donc celui de droite aussi, ainsi $R \geq \alpha$ ie $R^{-1} \leq \frac{1}{\alpha} < +\infty$ car $\alpha \neq 0$.

ainsi, $\overline{\lim_k}\left(\frac{\mu_k}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} < +\infty$. Le théorème 3 conclut.

Corollaire 5 : Si μ est à support dans $[a,b]$, $(a,b \in \mathbb{R})$ alors μ est caractérisée par ses moments.

Dém : Notons X sa v.a. associée. Alors $|X| \leq \max\{|a|,|b|\} = m$ p.s.

Donc $\mathbb{E}(e^{|X|}) \leq \mathbb{E}(e^m) = e^m < +\infty$. On prend $\alpha = 1$ dans le corollaire 4 qui conclut.

Remarque 6 : Les lois uniforme, binomiale, beta sont à support borné. Elles sont donc caractérisée par leurs moments.

Prop 7 : La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est caractérisée par ses moments.

Dém : On calcule $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^n e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \underset{\substack{u = x^{n-1} \\ v' = xe^{-x^2/2}}}{=} 2(n-1)\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-2}e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$

$= (n-1)\mu_{n-2}$

$\mu_{2n} = (2n-1)(2n-3)\cdots\mu_0$; $\mu_{2n+1} = 2n(2n-2)\cdots 2\mu_1 \Rightarrow \mu_n \leq C(n!)$

Donc $\overline{\lim}\left(\frac{\mu_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim_n}\, C^{\frac{1}{n}} < +\infty$. Le théorème 3 conclut. $(C > 0)$.

Prop 8 : La loi de Poisson est caractérisée par ses moments. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Dém : $\mathbb{E}(e^{|X|}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{e\lambda} = e^{\lambda(e-1)} < +\infty$.

Le corollaire 4 conclut.

Remarque 9 : On peut faire pareil avec la loi géométrique, pour la loi Gamma on peut calculer ses moments $m_n = a(a+1)\dots(a+n-1)/\lambda^n \leq \left(\frac{2n}{\lambda}\right)^n$ et utiliser le théorème 3. C'est aussi en particulier le cas pour la loi du chi-deux et exponentielles.

Contre-exemple fondamental 10 : les moments ne caractérisent pas la loi en toute généralité. La loi log-normale fournit un tel exemple.

Rappel : Si $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, $e^N \sim \mathrm{LogN}(0,1)$. La densité de e^N est alors :

$$f : x \longmapsto \frac{e^{-(\ln x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}\, x} \mathbb{1}_{x>0}.$$

Dém : On pose $g(x) = f(x)(1+\sin(2\pi \ln x))$. Par changement de variable $y = \ln x$:

$$\int_0^{+\infty} x^k f(x) \sin(2\pi \ln x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{yk} f(e^y) \sin(2\pi y) e^y\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{yk} e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sin(2\pi y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(y-k)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{k^2/2} \sin(2\pi y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sin(2\pi(u+k)) e^{k^2/2}\, du$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2/2} \sin(2\pi u)}{\sqrt{2\pi}} e^{k^2/2}\, du = 0 \text{ (imparité)}$$

Donc $\int x^k g(x) dx = \int x^k f(x) dx + \int x^k f(x) \sin(2\pi \ln x) dx = \int x^k f(x) dx \quad (\ast\ast\ast)$

$\rightsquigarrow$ f et g ont mêmes moments. De plus, g est bien une densité (intégrale $= 1$: $k=0$ dans $(\ast\ast\ast)$, $g \geq 0$ car $1+\sin(\cdot) \geq 0$).

et pourtant $f \neq g$. <u>Les moments ne caractérisent pas la loi en toute généralité.</u>