Endomorphismes normaux

ref : Gourdon, Algèbre p. 260 + FGN X-ENS Algèbre 3 p 65.

Thm 1 : E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ endo normal (ie $uu^* = u^*u$) alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_R & & & \\ & & & T_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & T_s \end{pmatrix}$
avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $T_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Lm 2 : • $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, F sev de E stable par u, alors F est stable par u^* et $F^\perp$ est stable par u et u^*.
• si u est normal alors, pour tout sev F stable par u, $u_{|F}$ est normal.

Démo : • On a la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ donc la matrice de u est de cette forme pour cette décompo de l'espace : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. $u^* = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tB & {}^tC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix}$
ce qui montre que $F^\perp$ est stable par u^*. Le but est de mq $B = 0$.
u normal donc $uu^* = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^* + BB^* & BC^* \\ CB^* & CC^* \end{pmatrix}$

$$u^*u = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & C^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A & A^*B \\ B^*A & B^*B + C^*C \end{pmatrix}$$

Donc $AA^* + BB^* = A^*A \underset{Tr}{\longrightarrow} Tr(BB^*) = 0 \Rightarrow Tr({}^tBB) = 0$
Or $\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB)$ est un p.s. donc $B = 0$. Donc F est stable par u^* et $F^\perp$ est stable par u.
• On a alors $AA^* = A^*A$ ($B = 0$) donc $u_{|F}$ est normal.

Démo (thm) : Par récurrence sur $n = \dim E$. (réc forte)

$n = 1$: trivial

$k \leq n-1 \Rightarrow n$: Cas (1) : u admet une vp réelle λ.
Alors $\dim E_\lambda \geq 1$ et est stable par u. D'après le Lm, $E_\lambda^\perp$ est stable par u donc (Lm) $u_{|E_\lambda^\perp}$ est normal. Par HR, $\exists \mathcal{B}_2$ b.o.n. tq $[u_{|E_\lambda^\perp}]_{\mathcal{B}_2}$ est de la forme indiquée. On prend $\mathcal{B}_1$ bon de E_λ et u est de la forme voulue dans $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$

Cas (2) : u n'a aucune vp réelle.

$Q = X^2 + \alpha X + \beta$ un facteur irréductible de χ_u. Posons $N = \mathrm{Ker}(Q(u))$.

• $N \neq \{0\}$ car $Q(X) = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$. Comme λ est vp complexe $\det(u - \lambda\, id) = 0$ donc $\det(Q(u)) = 0$ donc $N \neq \{0\}$.

• $u_{|F}$ est normal. On pose $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x, u(x))$ pour $x \in N$. Comme u n'a pas de vp réelles, $\dim(F) = 2$ (la famille est libre). De plus, F est stable par u car $u(x) \in F$ et $u(u(x)) = -\alpha u(x) - \beta x \in F$ car $x \in N = \mathrm{Ker}(Q(u))$. Donc $u_{|F}$ est bien défini et normal (Lem).

• Soit B_1 bon de F. On note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de $u_{|F}$ dans cette base.

$$uu^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } a^2+b^2 = a^2+c^2$$
$$\Rightarrow b = \pm c$$
$$u^*u = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

si $b = c$: $\chi(X) = X^2 - (a+d) + ad - b^2$ $\quad \Delta = (a+d)^2 - 4(ad-b^2) = (a-d)^2 + b^2 \geq 0$.

donc il y a au moins une vp réelle pour $u_{|F}$ donc pour u. Absurde. Donc $b = -c$. Or $ab+cd = ac+bd$

$0 = ab+cd-ac-bd = ab-bd+ab-bd = b(2a-2d) \Rightarrow b(a-d) = 0$.

Si $b = 0$, la matrice est diagonale donc a une vp réelle donc $b \neq 0$.

Donc $a = d$. Donc $u_{|F}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

• Conclusion : Par HR, $\exists B_2$ bon tq $u_{|F^\perp}$ est de la bonne tête. On pose $B = (B_1, B_2)$ et on obtient une bon avec u comme voulu. $\square$

Corollaire 3 : (Thm spectral) E euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique ($f = f^*$ ou dit autoadjoint). Alors $\exists$ une bon. de vp de f et les vp de f sont réelles.

Démo : $f^* = f$ donc f est normal $\overset{\text{Thm 1}}{\Longrightarrow} \exists B$ tq $(f)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & T_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & T_s \end{pmatrix}$

or $f^* = f$ donc $T_i^* = T_i$ ie $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ donc $b = 0$ ie $[f]_B$ est diagonale réelle. $\square$

Corollaire 4 : (Anti-symétrie) Si ici $f^* = -f$ alors $(f)_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \begin{pmatrix} 0 & -b_k \\ b_k & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Démo : Pareil mais ici $T_i^* = -T_i$ donc $a = 0$ et $\lambda_i = -\lambda_i \Rightarrow \lambda_i = 0$. $\square$

Corollaire 5 : (Matrices orthogonales) ici $ff^* = id$.

Démo : $\lambda \times \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

et $T_i T_i^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & +b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a = \cos\theta, b = \sin\theta$

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\leadsto [f]_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & R_{\theta_1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$ $\square$.

Corollaire 6 : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Démo : • $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ${}^t\exp(A) = \exp({}^tA) = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}$

donc $\exp(A)\,{}^t\exp(A) = I_n \leadsto \exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$.

Et $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr} A) = \exp(0) = 1$ donc $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$. ok.

• Une matrice M de $SO_n(\mathbb{R})$ est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$ car :

c'est le corollaire 5 + $\det(SO_n(\mathbb{R})) = 1$ donc il y a un nombre pair de -1 qu'on incorpore dans les R_θ avec des R_π.

On a $M = \exp(B)$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \theta_1 J & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \theta_s J \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

car $\exp(\theta_1 J) = R_{\theta_1}$ (car $J^2 = -I_2$) et $\theta_i J \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $M = P \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix} P^{-1} = P\exp(B)P^{-1} = \exp(PBP^{-1})$

avec $PBP^{-1} \in \mathcal{A}_n$ car $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. $\square$.