Etude de $O(p,s)$:

Ref : H2G2 (p211)

Thm : Il existe un homéo $O(p,s) \simeq O(p)\times O(s)\times \mathbb{R}^{ps}$

Def : $O(p,s) = \{A\in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tA I_{ps} A = I_{p,s}\}$ (signature de la forme quadratique (p,s))

Lem : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéo. $I_{ps} = \begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & -I_s\end{pmatrix}$

Preuve du Lem : • C^0 : $S = PDP^{-1}$ par thm spectral $P\in O_n(\mathbb{R})$

Donc $\exp S = P\,\mathrm{Diag}(e^{d_1},\dots,e^{d_n})P^{-1}$ $D = \mathrm{Diag}(d_1,\dots,d_n)$, $d_i\in\mathbb{R}$

$= P\,\mathrm{Diag}(e^{d_1},\dots,e^{d_n})\,{}^tP \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et est C^0 par restriction.

• surj : $B\in S_n^{++}$, $B = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P^{-1} = \exp(\underbrace{P\,\mathrm{Diag}(\ln\lambda_1,\dots,\ln\lambda_n)P^{-1}}_{\in S_n(\mathbb{R})})$

• inj : $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tq $\exp(A)=\exp(A')$.

$e^{d_1},\dots,e^{d_n}$ les vp de $\exp(A)$. Q interpolateur tq $Q(e^{d_i}) = d_i$ donc : car $\begin{cases} P\in O_n(\mathbb{R}) \\ d_i>0.\end{cases}$

$A = Q(\exp A) = Q(\exp A') \in \mathbb{C}[A']$ donc A et A' commutent donc par codiagonalisation :

$A = PDP^{-1}$, $A' = PD'P^{-1}$ donc $\exp(A)=\exp(A')$ ssi $\exp(D)=\exp(D')$ ssi $D=D'$ ssi $A=A'$

• bicontinuité : Soit $(B_p)_p = (\exp(A_p))_p$ une suite de S_n^{++} qui cv vers $B = \exp(A)\in S_n^{++}$!

Mq $A_p\to A$. (B_p) cv donc est bornée pour $\|\cdot\|_2$ et par continuité de l'inverse sur $GL_n(\mathbb{R})$, (par cont du det et de sa non annulation sur $GL_n(\mathbb{R})$), la suite $(B_p^{-1})_p$ converge vers B^{-1} et est aussi bornée pour $\|\cdot\|_2$.

Or $\forall M\in S_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_2 = \sqrt{\rho({}^tMM)} = \sqrt{\rho(M^2)} \overset{M=PDP^{-1}}{=} \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{\sup|d_i|^2} = \sup|d_i| = \rho(M)$.

Donc : $\exists C>0, \forall p\geq 0\ Sp(B_p)\subset[0,C]$

$\exists \tilde{C}>0\ \forall p\geq 0\ Sp(B_p^{-1})\subset[0,\hat{C}]$. $Sp(B_p^{-1}) = \{\frac{1}{d}, d\in Sp(B_p)\}$

Donc $Sp(B_p)\subset[\hat{C}, C]\subset\mathbb{R}_+^*$ donc $\forall p\geq 0\ Sp(A_p)\subset[\ln\hat{C},\ln C]$

Donc (A_p) est bornée pour $\|\cdot\|_2$ et a une unique v.a car : compact

si on prend A_{p_k} une ss-suite $\to \tilde{A}\in S_n$ alors $\exp(\tilde{A})\leftarrow\exp(A_{p_k}) = B_{p_k}\to B = \exp(A)$

Par unicité de la limite et par injectivité de l'exp sur S_n, $A=\tilde{A}$. Ainsi (A_p) est bornée et ne possède qu'une v.a donc cv.

□/.

Démo du thm : ① $\mathcal{O}(p,s) \simeq (\mathcal{O}(p,s) \cap O_n(\mathbb{R})) \times (\mathcal{O}(p,s) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}))$

Soit $M \in \mathcal{O}(p,s) \subset GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists ! (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$ (décompo polaire). On a ${}^tMM = S^2$ et ${}^tM \in \mathcal{O}(p,s)$ car

${}^tM I_{ps} M = I_{ps}$ ssi $({}^tM)^{-1} = I_{ps} M I_{ps}$ ssi $M^{-1} = I_{ps}\, {}^tM I_{ps}$ ssi $M I_{ps} {}^tM = I_{ps}$.

De plus, $\mathcal{O}(p,s)$ est un groupe donc ${}^tMM \in \mathcal{O}(p,s)$ ie $S^2 \in \mathcal{O}(p,s)$. Notons $T = S^2 \in S_n^{++}$ (car ${}^tMM = T \in S_n^{++}$) et U l'unique matrice de $S_n(\mathbb{R})$ tq $T = \exp(U)$. Donc $S = \exp(U/2)$ par unicité de la racine carrée sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Mq $S \in \mathcal{O}(p,S)$ sachant qu'on a déjà $T \in \mathcal{O}(p,s)$.

$T \in \mathcal{O}(p,s)$ ssi ${}^tT I_{ps} T = I_{ps}$ ssi ${}^t\exp(U) = I_{ps} \exp(-U) I_{ps}$

ssi $\exp({}^tU) = \exp(U) = I_{ps} \exp(-U) I_{ps} = \exp(-I_{ps} U I_{ps})$

ssi (bij) $U = -I_{ps} U I_{ps}$ ssi ($\times I_{ps}$) $U I_{ps} = -I_{ps} U$

ssi $\frac{U}{2} I_{ps} = -I_{ps} \frac{U}{2}$ ssi (exp) $I_{ps} S I_{ps} = S^{-1}$

ssi ($S \in S_n^{++}$) ${}^tS I_{ps} S = I_{ps}$ ssi $S \in \mathcal{O}(p,s)$.

Donc $S \in \mathcal{O}(p,s)$ et aussi $O = MS^{-1} \in \mathcal{O}(p,s)$. Ainsi la restriction de l'homéo de la décompo polaire à $\mathcal{O}(p,s)$ donne φ : $\varphi : \mathcal{O}(p,s) \simeq (\mathcal{O}(p,s) \cap O_n) \times (\mathcal{O}(p,s) \cap S_n^{++})$
$M \longmapsto (O,S)$

② $\mathcal{O}(p,s) \cap O_n(\mathbb{R}) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R})$

Soit $M \in \mathcal{O}(p,s) \cap O_n(\mathbb{R})$. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ $A \in \mathcal{M}_p$, $D \in \mathcal{M}_s$

On a ${}^tM I_{ps} M = I_{ps}$ ssi $\begin{pmatrix} {}^tAA - {}^tCC & * \\ * & {}^tBB - {}^tDD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$

Et ${}^tMM = I_n$ ssi $\begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tCC & * \\ * & {}^tBB + {}^tDD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} {}^tAA - {}^tCC = I_p \\ {}^tAA + {}^tCC = I_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}^tAA = I_p \\ {}^tCC = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} {}^tBB - {}^tDD = -I_s \\ {}^tBB + {}^tDD = I_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}^tBB = 0 \\ {}^tDD = I_s \end{cases}$

donc $A \in O(p)$ et $D \in O(s)$. De plus, $B = 0$ et $C = 0$ ($\langle C,C \rangle = \mathrm{Tr}({}^tCC)$; $\|C\|^2$)

Donc $\varphi : \begin{cases} \mathcal{O}(p,s) \cap O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} O(p) \times O(s) \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \longmapsto (A,D) \end{cases}$ est un homéo (car C^0, bij + inverse C^0)

③ $O(p,s) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{ps}$

On pose $L = \{ U \in S_n(\mathbb{R}),\ U I_{ps} + I_{ps} U = 0 \}$. Alors $\exp : L \cap S_n \to S_n^{++} \cap O(p,s)$ est un homéo :

- définie : si $U \in L \cap S_n$ alors $U = {}^tU = -I_{ps} U I_{ps}^{-1}$
  donc $\exp(U) = I_{ps} \exp(-U) I_{ps}$
  $\Rightarrow \exp(U) I_{ps} \exp(U) = I_{ps} \leadsto \exp(U) \in O(p,s)$
  et $\in S_n^{++}(\mathbb{R})$
- inj : OK par Lm
- surj : $T \in S_n^{++} \cap O(p,s) \Rightarrow \exists U \in S_n,\ T = \exp(U)$.
  $U \in S_n,\ T \in O(p,s) \to {}^tU = -I_{ps} U I_{ps}^{-1} \leadsto U \in L$
  donc $U \in L \cap S_n,\ T = \exp(U)$.
- bicont : OK par Lm.

$L \cap S_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev, on cherche sa dimension. $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$U \in S_n(\mathbb{R})$ ssi ${}^tA = A,\ {}^tB = C,\ {}^tD = D$.

$U I_{ps} + I_{ps} U = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix}$ $U \in L$ ssi $A = D = 0$

Donc $L \cap S_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix},\ B \in M_{ps} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{ps}$
$\longmapsto (b_{11}, \dots, b_{1s}, \dots, b_{p1}, \dots b_{ps})$

est un homéo.

Donc $O(p,s) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{ps}$. ∎

Rq : • Si $p,s \neq 0$, $O(p,s)$ a quatre composantes connexes.
• $O(p,s)$ est compact ssi $p = 0$ ou $s = 0$.