201, 209, 213, 234, 239, 245, 250

Densité des polynômes orthogonaux

Bettinger Jérémy

Ref : Objectif Agreg (p140).

<u>Thm</u> : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, ρ un poids (ie mesurable, >0, tq $\forall n \int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$). Si $\exists \alpha > 0$ tq $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$ alors la famille (unique) de polynômes (unitaires càd de norme 1) orthogonaux obtenue par Gram-Schmidt forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $f \in L^2(I,\rho)$. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x)\rho(x), & x\in I \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

$\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ car

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi| = \int_I |f(x)\rho(x)| = \int_I |f\sqrt{\rho}||\sqrt{\rho}| \overset{C-S}{\leq} \underbrace{\left(\int_I f^2\rho\right)^{1/2}}_{<+\infty \; f\in L^2(I,\rho)} \Big(\underbrace{\int_I \rho}_{<+\infty \text{ (hyp)}}\Big)^{1/2}.$$

On peut considérer $\hat{\varphi} : w \mapsto \int_I e^{-iwx} f(x)\rho(x)\,dx$, $w\in\mathbb{R}$.

① Mq $\hat{\varphi}$ se prolonge holomorphiquement sur $\{z, |\mathrm{Im}(z)| < \alpha/2\} = B_\alpha$

On pose $g(z,x) = e^{-izx} f(x)\rho(x)$.

Pour $z \in B_\alpha$ on a :

$$\int_I |g(z,x)|\,dx = \int_I e^{\mathrm{Im}(z)|x|} |f(x)|\rho(x)\,dx$$
$$\leq \int_I e^{\alpha|x|/2} |f(x)|\rho(x)\,dx$$
$$\overset{C-S}{\leq} \underbrace{\left(\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx\right)^{1/2}}_{<+\infty} \left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,dx\right)^{1/2}$$

Posons $F(z) = \int_I g(z,x)\,dx$: • $\forall z\in B_\alpha$, $g(z,\cdot)$ est mesurable & $\forall x\in I$, $g(\cdot,x)$ est holomorphe

• $\forall z \in B_\alpha, \forall x\in I$ $|g(z,x)| \leq e^{\alpha|x|/2}|f|\rho \in L^1$ par ce qui précède.

D'après le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, F est holo sur B_α et :

$$F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,dx.$$

② Mq $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0\}$

Soit $f \in \mathbb{R}[X]^\perp$. Alors $\langle f, x^n \rangle_\rho = 0$

Or $F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\,dx = (-i)^n \langle f, x^n\rangle_\rho = 0$.

De plus, F est holomorphe au voisinage de 0, elle est DSE au voisinage de 0
$F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n = 0$. Par théorème de prolongement analytique, puisque B_α est un ouvert connexe, $F = 0$ sur B_α et en particulier sur $\mathbb{R}$. Donc $\hat{\varphi} = 0 \in L^1$ $\Rightarrow$ $0 = \hat{0} = \hat{\hat{\varphi}} = 2\pi\varphi(-\cdot)$ (inversion de Fourier)
Donc $\varphi = 0$ p.p. Comme $\rho > 0$, $f = 0$ p.p sur I.
Donc $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0\}$. Par critère de densité dans le Hilbert $L^2(I,\rho)$, $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $L^2(I,\rho)$.

$\square$

Contre exemple : Inspiré de la loi log normale et du problème des moments

$\rho(x) = e^{-[\ln(x)]^2}$ $\quad f(x) = \sin(2\pi \ln x)$ $\quad I = \mathbb{R}_+^*$

$$\langle f, x^n\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-(\ln x)^2} \sin(2\pi \ln x)\, x^{n+1} \frac{dx}{x} \underset{u=\ln x}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \sin(2\pi u)\, e^{u(n+1)}\,du$$

$= \mathbb{E}(X^{n+1})$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u)\, e^{-(u-(\frac{n+1}{2}))^2} e^{(\frac{n+1}{2})^2}\,du \underset{v = u - (\frac{n+1}{2})}{=} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi v + \pi(n+1))\, e^{-v^2} e^{(\frac{n+1}{2})^2}\,dv$$

$$= e^{(\frac{n+1}{2})^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} \sin(2\pi v) = 0 \quad \text{(impaire)}$$

et $f \neq 0$!

→ $\mathbb{R}[X]$ n'est pas dense dans $L^2(I,\rho)$ donc la famille des polynômes orthogonaux n'est pas une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$
→ ρ est bien un poids : $\int_0^{+\infty} e^{-(\ln x)^2} x^n < +\infty$ mais
→ $e^{\alpha x}\rho(x) = e^{\alpha x - (\ln x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \notin L^1(\mathbb{R}_+^*)$: ne vérifie pas la condition !

Exemples : • $\rho(x) = e^{-x^2}$, $I = \mathbb{R}$ polynômes de Hermite

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \partial^n (e^{-x^2})$$

• $\rho(x) = 1$, $I = [-1,1]$ polynômes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \partial^n ((x^2-1)^n)$$

• $\rho(x) = e^{-x}$, $I = \mathbb{R}_+$ polynôme de Laguerre

$$P_n(x) = \frac{e^x}{n!} \partial^n (x^n e^{-x})$$

• $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $I = [-1,1]$ polynôme de Tchebychev de 1ère espèce.

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

• $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ $I = [-1,1]$ polynôme de Tchebychev de 2nde espèce.

$$\tilde{T}_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

$\longrightarrow$ Ces polynômes forment une base hilbertienne pour $L^2(I,\rho)$.

Application : $I = \mathbb{R}$, $\rho = e^{-x^2}$. On a une base de $L^2(I,\rho)$.

$$\varphi : L^2(\mathbb{R},\rho) \to L^2(\mathbb{R}) \quad \text{est une isométrie bijective.}$$
$$f \longmapsto f\sqrt{\rho}$$
$$\frac{g}{\sqrt{\rho}} \longleftarrow g$$

On en déduit que $(P_n\sqrt{\rho})$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$

(P_n) polynômes de Hermite.

Rq : On peut faire pareil sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ avec les polynômes de Laguerre.