241, 246, 250, 265
(243)

Formule de Poisson :

<u>Refs</u> : Gourdon (p 273) Analyse 2ème édition
- Candelpergher, calcul intégral. • Willem, Principes d'analyse fonctionnelle (chap 6).

<u>Théorème 1</u> : (Formule de Poisson)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tq $f(x) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + 2\pi n)$ cvn sur tout compact et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

où $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$

<u>Démonstration</u> : ① cvn de la somme sur tout compact :

Par hypothèse, $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq \frac{M}{1+x^2}$ pour un certain $M \geq 0$.

Soit $\underbrace{[-K, K]}_{=I}$ compact de $\mathbb{R}$, $\forall x \in I$ et $|n| \geq K$ on a :

$$|f(x+2\pi n)| \leq \frac{M}{1+(x+2\pi n)^2} \leq \frac{M}{1+(2\pi|n|-K)^2} \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f(\cdot + 2\pi n)\|_{\infty,K} < +\infty$ d'où la cvn sur tout compact.

On note $F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

② F est $C^1(\mathbb{R})$:

On peut faire pareil pour f'. Puisque $f \in C^1$, $\sum f(\cdot + 2\pi n)$ cvs et $\sum f'(\cdot + 2\pi n)$ cvn sur tout compact donc cvu sur tout compact.
On a ainsi, $F \in C^1(\mathbb{R})$.

(3) F est 2π-périodique

On a $\sum_{-N}^{N} f(x+2\pi+2\pi n) = \underbrace{\sum_{-N-1}^{N+1} f(x+2\pi n)}_{\to F(x)} - \underbrace{f(x-2\pi N)}_{\to 0} - \underbrace{f(x-2\pi(N+1))}_{\to 0}$

$\downarrow N\to+\infty$

$F(x+2\pi)$

Car $|f(x+\tilde{N})| \leq \frac{M}{1+(x+\tilde{N})^2} \xrightarrow[\tilde{N}\to+\infty]{} 0$. Donc $F(x+2\pi) = F(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(4) Théorème de Dirichlet :

Puisque $F\in C^1_{2\pi}$, on peut appliquer le théorème de Dirichlet.

Ainsi $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F) e^{inx}$.

Or $c_n(F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi k) e^{-inx}dx$

$\overset{CVU}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi k)e^{-inx}dx \underset{u=x+2\pi k}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(u) e^{-in(u-2\pi k)}du$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-inu}du = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(n)$.

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{inx}$ $\square$

Rq : En particulier pour $x=0$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n)\times 2\pi = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)$.

Avec la convention $\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi x}dx$

on aurait eu :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n). \quad \forall f\in C^1,\ f, f' \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Rq : $f\in S(\mathbb{R}) \Rightarrow f\in C^1$ et $f, f' \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right) \to$ la formule est toujours ok pour $f\in S(\mathbb{R})$.

Application 1 : Pour $a>0$, on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a)$

Démonstration : On pose $f(t) = e^{-a|t|} \in L^1(\mathbb{R})$.

On a $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t|} e^{-ixt}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(a-ix)}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-t(a+ix)}\,dt$

$= \left[\frac{e^{t(a-ix)}}{a-ix}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-t(a+ix)}}{-(a+ix)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-ix} + \frac{1}{a+ix} = \frac{2a}{(a+ix)(a-ix)}$

$= \frac{2a}{a^2+x^2}$.

On utilise une autre forme de Poisson (Candelpergher) $f \in C^0$, $f, \hat{f} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

La formule de Poisson donne :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2a}{a^2+n^2} = \frac{a}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{a^2+n^2}$$

Or :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n\geq 1} f(2\pi n) + f(0) + \sum_{n\leq -1} f(2\pi n) = \sum_{n\geq 1} e^{-a2\pi n} + 1 + \sum_{n\leq -1} e^{a2\pi n}$$

$$= 2\sum_{n\geq 1} e^{-2\pi a n} + 1 = \frac{2e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} + 1$$

$$= \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} = \frac{e^{-\pi a}(e^{\pi a}+e^{-\pi a})/2}{e^{-\pi a}(e^{\pi a}-e^{-\pi a})/2} = \frac{ch(\pi a)}{sh(\pi a)} = \coth(\pi a).$$

Corollaire : (Bettinger !!) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

Démonstration :

On a d'après l'application 1 la formule : $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a) - \frac{1}{a^2}$

Soit $2\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\left(\pi a \frac{ch(\pi a)}{sh(\pi a)} - 1\right) = \frac{1}{a^2}\left(\pi a \frac{ch(\pi a)}{\pi a + \frac{(\pi a)^3}{6} + \underset{a\to 0}{o}(a^3)} - 1\right)$

$= \frac{1}{a^2}\left(ch(\pi a)\frac{1}{1+\frac{\pi^2 a^2}{6}+o(a^2)} - 1\right) = \frac{1}{a^2}\left(ch(\pi a)\left(1-\frac{\pi^2a^2}{6}+o(a^2)\right)-1\right)$

$= \frac{1}{a^2}\left(\left(1+\frac{\pi^2a^2}{2}+o(a^2)\right)\left(1-\frac{\pi^2a^2}{6}+o(a^2)\right)-1\right) = \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{\pi^2a^2}{2}-\frac{\pi^2a^2}{6}-1+o(a^2)\right) = \frac{\pi^2}{3}+o(1)$

Donc $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2+a^2} \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{\pi^2}{6}$. De plus, $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2+a^2} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} <$

On a convergence normale de la série donc uniforme.

Ainsi $\underbrace{\lim_{a\to 0} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2+a^2}}_{\frac{\pi^2}{6}} = \sum_{k\geq 1} \lim_{a\to 0} \frac{1}{k^2+a^2} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$. $\square$

<u>Corollaire</u> : (Développement de la cotangente)

$$\cotan z = \frac{1}{z} + \sum_{k\geq 1} \frac{2z}{z^2-\pi^2k^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{\dots,-\pi,0,\pi,2\pi,\dots\}$$

<u>Démonstration</u> : On a montré dans l'application 1 la formule :

$$\forall a>0 \quad \frac{a}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{2e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} + 1 = \frac{(e^{\pi a}+e^{-\pi a})/2}{(e^{\pi a}-e^{-\pi a})/2} \quad (*)$$

Or pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{\dots,-\pi,0,\pi,2\pi,\dots\}$ on a

$(e^{iz}+e^{-iz})/2 = \cos z$ et $(e^{iz}-e^{-iz})/2i = \sin z$.

De sorte que $\frac{1+2e^{-2\pi zi}}{1-e^{-2\pi zi}} + 1 = \frac{(e^{\pi zi}+e^{-\pi zi})/2}{(e^{\pi zi}-e^{-\pi zi})/2} = \frac{\cos(z\pi)}{\sin(z\pi)} \times \frac{1}{i} = \frac{\cotan(\pi z)}{i}$

donc $(*)$: ($zi = a$ ssi $z=-ia$)

$$\frac{a}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\cotan(-i\pi a)}{i} \quad \forall a>0.$$

On pose $z=-i\pi a$ pour obtenir : $\cotan(z) = \frac{-z}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\frac{zi}{\pi}\right)^2+n^2}$

soit $\cotan(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z}{z^2-\pi^2n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-\pi^2n^2}$.

cette relation est valable sur la demi-droite $\{z\in\mathbb{C}, z=-ia, a>0\}$.

Or les fonctions $z\mapsto \cotan z$ et $z \mapsto \frac{1}{z}+\sum_{n\geq 1}\frac{2z}{z^2-\pi^2n^2}$ sont holomorphes sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}\setminus\{\dots,-\pi,0,\pi,2\pi,\dots\}$.

cotan par quotient, l'autre car la série est normalement convergente sur tout compact de l'ouvert.

Par théorème d'égalité, ($\{z\in\mathbb{C}; z=-ia, a>0\}$ possède bien un point d'accumulation dans $\mathbb{C}\setminus\{\dots,-\pi,0,\pi,\dots\}$) on obtient la formule sur $\mathbb{C}\setminus\{\dots,-\pi,0,\pi,\dots\}$. $\square$

$\underline{p}$: On définit la fonction Θ par $\Theta(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}$ $\forall s>0$

1) vérifie $\sqrt{s}\,\Theta(s) = \Theta\left(\frac{1}{s}\right)$ $\forall s>0$

<u>Démonstration</u> : Notons $f_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x^2} \in S(\mathbb{R})$. $\alpha>0$

On a $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-ixt}\,dt$. Puisque $|e^{-\alpha t^2} e^{-ixt}| \leq e^{-\alpha t^2} \in L^1(\mathbb{R})$

et que $x \mapsto e^{-\alpha t^2} e^{-ixt} \in C^1$, on a par théorème de ∂ sous l'$\int$:

$$\hat{f}(x)' = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2}(-it)e^{-ixt}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\alpha t^2}\times(-2\alpha t)\right)\frac{(-it)}{-2\alpha t}e^{-ixt}\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\alpha t^2}\right)' \frac{i}{2\alpha} e^{-ixt}\,dt = \left[e^{-\alpha t^2}\frac{i}{2\alpha}e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2}\frac{i}{2\alpha}(-ix)e^{-ixt}\,dt$$

$$= \frac{-x}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2}e^{-ixt}\,dt = \frac{-x}{2\alpha}\hat{f}(x). \text{ Soit } \frac{\hat{f}'}{\hat{f}} = \frac{-x}{2\alpha} \Rightarrow \ln \hat{f} = \frac{-x^2}{4\alpha}+c$$

$$\Rightarrow \hat{f}(x) = Ae^{-x^2/4\alpha} \Rightarrow \hat{f}(x) = \hat{f}(0)e^{-x^2/4\alpha}$$

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2}\,dt \underset{u=\sqrt{\alpha}t}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \text{ Ainsi } \forall x\in\mathbb{R}\ \hat{f}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-x^2/4\alpha}$$

D'après la formule de Poisson, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_\alpha(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)/2\pi$.

On prend $\alpha = \frac{s}{4\pi} > 0$:

$$\Theta(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{s/4\pi}}\, e^{-n^2/s/\pi} / 2\pi$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{\sqrt{s}}\, e^{-\pi n^2/s} / 2\pi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/s} = \frac{1}{\sqrt{s}}\Theta\left(\frac{1}{s}\right) \ \square$$

<u>Corollaire</u> : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ (série entière de $R_{cv} = 1$).

<u>Démonstration</u> : $x^{n^2} = e^{n^2\ln x}$. On pose $s = -\ln(x)/\pi > 0$ pour $0<x<1$.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2} = \Theta(-\ln x/\pi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\ln x}}\Theta\left(\frac{\pi}{-\ln x}\right) \underset{1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}. \text{ Et } \Theta\left(\frac{\pi}{-\ln x}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{\pi^2 n^2/\ln x} + 1 \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 1$$

$\square$