Méthode QR

<u>Leçons</u> : 148, 149, 157, 162

<u>Ref</u> : Ciarlet, introduction à l'ana. matricielle et à l'optim. (p124)

<u>Thm 1</u> : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$ tq $\exists P^{-1} \in GL_n$ qui a une décompo LU et qu'on ait $A = PDP^{-1}$; $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Alors la suite définie par : $\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = R_k Q_k \end{cases}$ où $Q_k R_k$ est la décompo QR de A_k.
Converge vers une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

<u>Rq</u> : Les valeurs au dessus de la diag peuvent ne pas cv, il faut comprendre que $\mathrm{diag}(A_k)$ cv vers $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et les coeffs en dessous de la diag cv vers 0.

<u>Démo</u> : On note $Q^{(k)} = Q_1 \dots Q_k$ et $R^{(k)} = R_k \dots R_1$. On a alors :
i) $A^k = Q^{(k)} R^{(k)}$ et ii) $A_{k+1} = Q^{(k)*} A Q^{(k)}$ car :
i) $A^k = (Q_1 R_1)^k = Q_1 (R_1 Q_1)^{k-1} R_1 = Q_1 A_2^{k-1} R_1 = Q_1 \dots Q_k R_k \dots R_1 = Q^{(k)} R^{(k)}$
ii) $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* Q_k R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k = \dots = Q_k^* Q^{(k-1)*} A Q^{(k-1)} Q_k$

<u>But</u> : Trouver l'expression de $Q^{(k)}$ pour connaître $A^k = Q^{(k)*} A Q^{(k)}$

① Décomposition QR de A^k :

Les vp de A sont $\neq$ donc A est dz : $A^k = PD^kP^{-1}$
Notons QR la décompo QR de P (possible car $(Q,R) \in U_n \times T_n^+ \to QR \in GL_n$ est un homéo)
On a $A^k = QRD^kLU$ car $P^{-1} = LU$ (hypo)
$= QR(D^kLD^{-k})D^kU$.

Or $(D^kLD^{-k})_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i<j \\ 1 & \text{si } i=j \\ \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k L_{ij} & \text{si } i>j \end{cases} \xrightarrow[k\to\infty]{} I_n$ car $|\lambda_i| < |\lambda_j|$

Donc $RD^kLD^{-k}R^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} I_n$ (par cont de $A \mapsto XAX^{-1}$).
Notons O_kT_k la décompo QR de $RD^kLD^{-k}R^{-1}$. O_kT_k cv vers I_n donc par homéo, O_k et $T_k \to I_n$.

On a alors $A^k = (Q O_k)(T_k R D^k U)$.

$Q O_k$ est bien unitaire car Q et O_k le sont. De plus, $T_k R D^k U \in T_n(\mathbb{C})$ mais n'est pas à diag réelle strict. positive.

Puisque U triangulable (car P^{-1} l'est) on peut écrire pour :

$$U = \begin{pmatrix} \rho_1 e^{i\theta_1} & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \rho_n e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \to \Delta_2 = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \text{ et } U' = \begin{pmatrix} \rho_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix}$$

pour avoir $U = \Delta_2 U'$.

Et $D = \Delta_1 |D|$ où $|D| = \mathrm{Diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ et Δ_1 = diag des angles.

Ainsi $|D|$ et $U' \in T_n^+$ de diag réelle strict positive.

Alors $A^k = \underbrace{(Q O_k \Delta_1^k \Delta_2)}_{\in U_n(\mathbb{C})} \underbrace{(\Delta_2^{-1} \Delta_1^{-k} T_k R \Delta_1^k |D|^k \Delta_2 U')}_{\in T_n^+(\mathbb{C})}$

donc on a la décompo QR de $A^k = Q^{(k)} R^{(k)}$. Par unicité : $Q^{(k)} = Q O_k \Delta_1^k \Delta_2$

E2) <u>Convergence de A_k :</u>

$$A_{k+1} = Q^{(k)*} A Q^{(k)} = (Q O_k \Delta_1^k \Delta_2)^{(*)} A Q O_k \Delta_1^k \Delta_2$$
$$= (\Delta_1^k \Delta_2)^* O_k^* Q^* A Q O_k \Delta_1^k \Delta_2$$

Or $Q^* A Q = Q^* Q R D R^{-1} Q^{-1} Q = R D R^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ car $R \in T_n(\mathbb{C})$.

On a vu que $O_k \to I_n$ donc $O_k^* Q^* A Q O_k$ cv vers $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

De plus, la conjugaison par $\Delta_1^k \Delta_2$ ne change ni les coeffs sur la diag ni en dessous.

Donc A_k cv vers une mat. triangulaire sup. de diag $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

<u>Rq</u> : Si 2 vp ont même module, le thm est faux → si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $A_k = A$ $\forall k$.
donc ne cv pas vers une mat triangulaire sup.

Si plusieurs vp ont même module, on a cv vers une mat triangulaire par bloc.

<u>Rq</u> : En pratique, on met A sous forme de Hessenberg : $A = PHP^{-1}$ $H = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ * & \ddots & * \end{pmatrix}$ (surdiag $\neq 0$)
pour avoir les vp de A on a :

$A_{k+1} = (Q_1 \dots Q_k)^{-1} H Q_1 \dots Q_k$ et $Q_1 \dots Q_k$ cv vers une mat qui contient les vp en colonne.

<u>Rq</u> : • $\begin{cases} U_n(\mathbb{C}) \times T_n^+(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C}) \\ (Q, R) \longmapsto QR \end{cases}$ est un homéo où $T_n^+(\mathbb{C})$ est l'ens des mat triang-sup. à diag réels strict positifs.

• $P^{-1} = LU$ dans la démo ; L triang inf avec des 1 sur la diag ; U triang sup.