Une équation de Riccati

Réf : 131 dev
Leçons : 220, 228, 229

Étude de (E) : $x'(t) = x(t)^2 - t$

Prop 1 : (E) admet des solutions maximales. De plus, elles sont $C^\infty(I)$.
I = leur intervalle de déf

Dem : (E) : $x' = F(t,x)$ avec $F(t,x) = x^2 - t$.
$F \in C^\infty$ donc local lipschitz. Par Cauchy-Lipschitz, il existe des solutions (qui sont uniques) maximales. Elles sont C^∞ car $F \in C^\infty$. □

Lem 2 : Soit $f \in C^1(I,\mathbb{R})$ tq $\forall t \in I$ si $f(t)=0$ alors $f'(t)>0$.
Alors f s'annule au plus une fois, et si f s'annule en $\nu \in I$ alors $f<0$ sur $]a,\nu[$ et $f>0$ sur $]\nu,b[$.

Dem : Si $\alpha \in I$ et tq $f(\alpha)=0$ alors $f'(\alpha) \neq 0$ et $f(t) \underset{t\to\alpha}{\sim} (t-\alpha)\underbrace{f'(\alpha)}_{>0}$.
Ainsi $f>0$ au $V(\alpha^+)$ et $f<0$ au $V(\alpha^-)$.
Si $\alpha<\beta$ tq $f(\alpha)=f(\beta)=0$ (zéros consécutifs) alors
$$\begin{cases} f(t) \underset{\alpha^+}{\sim} (t-\alpha) f'(\alpha) > 0 \\ f(t) \underset{\beta^-}{\sim} (t-\beta) \underbrace{f'(\beta)}_{>0} < 0 \end{cases} \quad (*)$$
Par le TVI, f s'annule sur $]\alpha,\beta[$. Absurde. Ainsi, f s'annule au plus une fois, le signe de f découle du TVI et de $(*)$. □

Prop 3 : x a au plus un point critique et au plus un point d'inflexion.
De plus, x et x' sont strictement monotones au $V(a)$ et $V(b)$ dans I pour x solution maximale sur $]a,b[$, $a<b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dem : $x' = x^2 - t \qquad x'' = 2xx' - 1 \qquad x''' = 2x'^2 + 2xx''$

- Si $x'(t)=0$ alors $x''(t) = -1 < 0$. On applique Lem 2 à $-x'$: x' s'annule donc au plus 1 fois donc x a au plus 1 pt critique. Si x admet un pt critique en $\nu \in I$ alors $x'>0$ sur $]a,\nu[$ et $x'<0$ sur $]\nu,b[$.
- Si $x''(t)=0$ alors $2xx'=1$ ie $x' \neq 0$ donc $x'''(t) = 2x'^2(t) > 0$.

$\underset{\text{Lem } f = x''}{\Longrightarrow}$ x'' s'annule au plus 1 fois donc x a au plus 1 pt d'inflexion.
Ainsi x' et x'' changent de signe au plus 1 fois sur I et x et x' sont strict. monotones au $V(a)$ et de $V(b)$ dans I. □

Prop 4 : On a $a \neq -\infty$. De plus, $x(t) \underset{t\to a^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $x'(t) \underset{t\to a^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Dem : Supposons par l'absurde $a = -\infty$. Soit $c < \min(0,b)$ et $w = \sqrt{-c}$.
Pour $u < c$: $x'(u) = x(u)^2 - u \geq x(u)^2 - c = x(u)^2 + w^2$.
d'où $\dfrac{x'(u)}{x(u)^2+w^2} \geq 1$ puis en intégrant entre t et c :

$$\int_t^c \frac{x'(u)}{x(u)^2+w^2}\,du \geq c - t.$$

$v = x(u)$ et un Chgt de var. C^1 d'où :

$$" \int_{x(t)}^{x(c)} \frac{dv}{v^2+w^2} = \left[\frac{1}{w}\arctan\left(\frac{v}{w}\right)\right]_{x(t)}^{x(c)} = \frac{1}{w}\left(\arctan\left(\frac{x(c)}{w}\right) - \arctan\left(\frac{x(t)}{w}\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{w} \times |\arctan(-)| + |\arctan(-)| \leq \frac{2\times \pi/2}{w} = \frac{\pi}{w}$$

Donc $\dfrac{\pi}{w} \geq c - t$. Absurde quand $t \to -\infty$. Donc $a > -\infty$.

D'après le théorème des bouts, la limite en a^+ ne peut pas être finie.
On $x' = x^2 - t \underset{t\to a^+}{\longrightarrow} \infty^2 - a = +\infty$ donc $x \underset{t\to a^+}{\longrightarrow} -\infty$. □

Prop 5 : Si $b < +\infty$, alors x est ↗ et admet un unique point d'inflexion.

Dem : Si $b < +\infty$. D'après la prop 3, x est monotone au $V(b)$ donc
$x(t) \underset{t\to b^-}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$. On $b < +\infty$ donc par thm des bouts, $l = \infty$. Mais on a
$x' = x^2 - t \underset{t\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$. Si x' devait s'annuler, par la prop 3, x serait croissante sur $]a,\vartheta[$ et décroissante sur $]\vartheta,b[$.
On $x' > 0$ au voisinage de b. Nécessairement, $x' \neq 0$, On $x' \to +\infty$ donc
$x' > 0$ sur I donc x est ↗ sur I et donc $x \underset{t\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$ ($l = +\infty$)
De plus, $x'' = 2xx' - 1 \underset{t\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $\underset{t\to a^+}{\longrightarrow} -\infty$ d'après prop 4. Par le TVI, $\exists \vartheta$ tq $x''(\vartheta) = 0$. Unique d'après prop 3.
Il y a un unique point d'inflexion. □

Prop 6 : Si x est croissante alors x est une bijection de $I \to \mathbb{R}$.

Dem : Puisque x est ↗ alors $x'(t) \geq 0$. Donc $\lim\limits_{t\to b^-} x(t) \in]-\infty,+\infty]$. (*)
Si $b < +\infty$, $l = +\infty$ par théorème des bouts. Si $b = +\infty$, $x^2 = x' + t \geq t \to +\infty$
Donc $x^2 \to +\infty$ donc $x \to +\infty$ (d'après *). Par continuité, les solutions ↗ sont des bijections strict croissantes de I dans $\mathbb{R}$ puisque $x(t) \underset{t\to a^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $x' = 0$ sauf en au plus un point donc x est strict ↗ de $]a,b[\to \mathbb{R}$. □

Prop 7 : Si x admet un point critique alors $b=+\infty$. De plus, x admet un unique point d'inflexion et on a le dev asymptotique : $x(t) = -\sqrt{t} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Dem : Si on a un point critique ϑ alors par la prop 3, x est strict $\nearrow$ sur $]a,\vartheta[$ et strict $\searrow$ sur $]\vartheta, b[$ et d'après prop 5 $b=+\infty$ (sinon x serait $\nearrow$).

Posons $l = \lim\limits_{t\to+\infty} x'(t)$. Comme $x \searrow$ sur $]\vartheta,+\infty[$ on a que $l \leq 0$.

. Si $-\infty < l < 0$ alors : Alors $x(t) - x(a) = \int_a^t x'(u)du \sim tl$ soit $x(t) \sim tl$.

Or $x'(t) = x(t)^2 - t = (tl + o(t))^2 - t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Absurde.

. Si $l = -\infty$: $\frac{x(t)}{t} \to -\infty$ puis $x' = x^2 - t = t^2\Big[\underbrace{\left(\frac{x}{t}\right)^2}_{\to+\infty} - \frac{1}{t}\Big] \to +\infty$. Absurde

. Donc $l=0$. On applique le théorème de Rolle, version asymptotique à x' : $x'(\vartheta) = 0 = x'(\infty)$: $\exists \theta \in]\vartheta,+\infty[$ tq $x''(\theta) = 0$. x admet un point d'inflexion. Il est unique par la prop 3.

On a $x' = x^2 - t = o(1)$, ce qui donne $x(t)^2 = t + o(1)$ soit $x(t) = -\sqrt{t+o(1)}$

d'où $x(t) = -\sqrt{t}\left(1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{t}\left(1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = -\sqrt{t} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $x \searrow$ $\square$

Rolle asymp : si $\begin{cases} f(a) = 0 \text{ et } f(\infty) = 0 \\ f\in C^1,\ f \geq 0 \end{cases}$ alors $\exists c$ tq $f'(c) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$

Prenons $M > a$ tq $f(x) \leq \varepsilon$ pour $x \geq M$.

Si $f = 0$, trivial. Sinon, $\exists b$ tq $f(b) = \max\limits_{x\in[a,M]} f(x) \neq 0$ ($> 2\varepsilon$)

Par le TVI, $\exists c \in [a,b]$ tq $f(c) = \frac{f(b)}{2} > \varepsilon$. De même, $\exists d \in [b,M]$ tq $f(d) = f(b)/2 > \varepsilon$.

Donc $\begin{cases} f(c) = f(d) \\ f \in C^1 \end{cases} \underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \theta \in]c,d[$ tq $f'(\theta) = 0$.

Plus simple : $M > a$ tq $f(x) \leq \varepsilon$ $\forall x \geq M$. Donc $\exists c \in [a,M]$ tq $f(c) = \max\limits_{[a,M]} f$

$f(c) \neq f(a)$ car $f(a) = 0$ (sinon $f=0$ ok). et $f(M) \leq \varepsilon$ alors que $\exists d \in]a,M[$ tq $f(d) > \varepsilon$ (sinon $f=0$). Donc $c \neq M$. Donc $c \in]a,M[$. Ainsi, $f'(c) = 0$ car c est alors un maximum local.

Dessin : $\cdot\ x(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty$

Soit $\cdot\ x(t) \xrightarrow[t\to b^-]{} +\infty$ et bij avec $\mathbb{R}$
pas de point critique

$\cdot$ point critique donc $b=+\infty$
$x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$

$\cdot\ b=+\infty$ mais pas de point critique
donc $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

Zone critique $x'=0$: $t=x^2$