Banach-Steinhaus et série de Fourier

Ref : Gourdon p 404-405

Thm : (Banach-Steinhaus)
E Banach, F evn, $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$, $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Soit :
① $(\|f\|)_{f\in H}$ est borné ou ② $\exists x \in E$ $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$

Démo : On pose $\Omega_k = \{x \in E, \sup_{f\in H} \|f(x)\| > k\}$. Ω_k est ouvert.
En effet : si $x_0 \in \Omega_k$, $\exists f \in H$ tq $\|f(x_0)\| > k$. Comme f est continue, $\exists \rho > 0$ tq $\|f(x)\| > k$ pour $\|x - x_0\| < \rho$. Donc $B(x_0, \rho) \subset \Omega_k$.

- Si chaque Ω_k est dense dans E, alors puisque E est complet, le théorème de Baire assure que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ est dense dans E donc non vide : $\exists x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ tq $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$.

- Sinon, $\exists k$ tq Ω_k ne soit pas dense dans E ie $\exists x_0 \in E$ $\exists \rho > 0$ tq $B(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \emptyset$ de sorte que $\forall x \in B(x_0, \rho)$, $\sup_{f\in H} \|f(x)\| \leq k$.

Donc $\forall x \in B(0, \rho)$ $\forall f \in H$ $\|f(x)\| = \|f(x+x_0) - f(x_0)\| \leq \|f(x+x_0)\| + \|f(x_0)\| \leq 2k$.
Par continuité de chaque $f \in H$, cette inégalité reste vraie sur $\overline{B(0,\rho)}$.
Ainsi, $\forall f \in H$ $\forall x \in E$ $\|x\| = 1$, $\|f(x)\| = \frac{1}{\rho}\|f(\rho x)\| \leq \frac{2k}{\rho}$
donc $\forall f \in H$ $\|f\| \leq \frac{2k}{\rho}$

Corollaire : $\exists f \in C^0_{2\pi}$ tq sa série de Fourier diverge en 0.

Démo : On pose $l_n : C^0_{2\pi} \to \mathbb{C}$
$$f \mapsto \sum_{p=-n}^{n} c_p(f)$$
l_n est une forme linéaire.
Mq elle est C^0 et calculons $\|l_n\|$.
$$|l_n(f)| = \left|\sum_{p=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt} f(t) \frac{dt}{2\pi}\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} f(t)\, dt\right|$$
$$\leq \|f\|_\infty \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin[(2n+1)t/2]}{\sin(t/2)}\right| dt$$
Donc $\|l_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin[(2n+1)t/2]}{\sin(t/2)}\right| dt$.

On pose $f_\varepsilon(t) = \dfrac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\varepsilon}$ où $D_n(t) = \dfrac{\sin[(2n+1)t/2]}{\sin(t/2)}$.

On a $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$

$|l_n(f_\varepsilon)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_n^2(t)}{|D_n(t)|+\varepsilon}\,dt\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{CVD} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt$

Donc $\|l_n\| \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$. D'où $\|l_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$.

Puisque $|\sin(t/2)| \leq |t/2|$ on a

$\|l_n\| \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin[(2n+1)t/2]|}{t/2}\,dt \underset{u=(2n+1)t/2}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{(2n+1)\pi}{2}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} |\sin u|\,\frac{du}{|u|}$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\left|\frac{\sin u}{u}\right|du \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\|l_n\| \to +\infty$.

Or $C^0_{2\pi}$ est complet (fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ complet).

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, $\exists f \in C^0_{2\pi}$ tq $\sup_{n\in\mathbb{N}}|l_n(f)| = +\infty$

ie la série de Fourier de f diverge en 0 : $\exists f\in C^0_{2\pi}$ tq $f \neq$ sa SF.

Exemple : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $C^0_{2\pi}$, paire tq $f(x) = \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}\sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right]$ $\forall x\in[0,\pi)$

a une SF qui dv en 0.

<u>Contre ex de B-S sans complétude :</u> $C_{0,0}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ suites à support fini.

$p_m : \begin{cases} C_{0,0} \to C_{0,0} \\ (x_k)_k \mapsto (m\,\mathbb{1}_{\mathbb{N}\setminus[0,m]}\, x_k)_k \end{cases}$

$p_m\in\mathcal{L}_c$ car $\forall x\in C_{0,0}$ $\|p_m(x)\|_\infty \leq m\|x\|_\infty$.

Or $\forall x\in C_{0,0}$ $\{\|p_m(x)\|\}_{m\in\mathbb{N}}$ est majoré par $\|x\|_\infty\times\max\{n\in\mathbb{N}, x_n\neq 0\}$

donc $\{\|p_m(x)\|_\infty\}_m$ est borné $\forall x$. $\underset{B-S}{\Longrightarrow}$ $\{\|p_m\|\}_m$ est borné.

Or $\forall m$ $\|p_m(\mathbb{1}_{[0,m]})\|_\infty = |m\,\mathbb{1}_{\{m\}}\|_\infty = m = m\|\mathbb{1}_{[0,m]}\|_\infty$

donc $\|p_m\| \geq m \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Absurde ! C'est l'hypothèse de complétude de $C_{0,0}$ qui est en déroute.

<u>Rq</u> : B-S permet de mq si $B : E_1\times E_2\to F$ est bilin et que les aplis partielles sont C^0 alors B est $C^0(E_1\times E_2)$ lorsque E_1 ou E_2 est un Banach et l'autre un evn.