$SO_3(\mathbb{R})$ et quaternions

Ref : Perrin (p163) — Leçons : 101, 106, 108, 154, 160, 161, 191

Rappels : $\mathbb{H} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1, i, j, k)$ de dim 4.
On a les relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ induisent une structure de corps non commutatif.
$Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$. Pour $q = a + ib + jc + kd$ on pose $Re(q) = a$, $Im(q) = ib + jc + kd$
et $\bar{q} = Re(q) - Im(q)$. On a $\overline{q_1 q_2} = \bar{q_2}\bar{q_1}$ donc $|q|^2 = q\bar{q}$.
On pose $G = \{z \in \mathbb{H}, |z| = 1\}$, sur G : $q^{-1} = \bar{q}$.

Thm 1 : On a l'iso de groupe $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.

Dem : • On considère l'action par conjugaison $G \curvearrowright \mathbb{H}$ et on définit
$S_q : q' \mapsto q q' \bar{q} \in GL(\mathbb{H})$ pour $q \in G$. On identifie $GL(\mathbb{H}) \simeq GL_4(\mathbb{R})$
dans la base $(1, i, j, k)$. Donc $S : G \to GL_4(\mathbb{R})$, $q \mapsto S_q$ un morph de groupe.

• Si $S_q = id$ alors $\forall q' \in \mathbb{H}$ $qq'\bar{q} = q'$ ie $qq' = q'q$ donc $q \in Z(\mathbb{H}) \cap G$
ie $q \in \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$. Réciproquement, $S_1 = S_{-1} = id$ d'où $\ker(S) = \{\pm 1\}$

• De plus, S_q conserve la norme sur $\mathbb{H}$: $|S_q(h)|^2 = qh\bar{q}\,\overline{qh\bar{q}} = q \underbrace{|h|^2}_{\in\mathbb{R}} \bar{q} = \underbrace{q\bar{q}}_{=1}|h|^2 = |h|^2$
Donc $S_q \in O_4(\mathbb{R})$ (isométrie)

• Soit $P = \mathrm{Vect}(i, j, k)$ les imaginaires purs de $\mathbb{H}$. P est stable par S_q car $\overline{S_q(h)} = -S_q(h)$ pour $h \in P$.
On pose $s_q = S_{q|P} \in O_3(\mathbb{R})$. Le morph $s : G \to O_3(\mathbb{R})$, $q \mapsto s_q$ a pour noyau $\ker(s) = \{\pm 1\}$

• On a $O_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ donc $s : G \to O_3(\mathbb{R})$ est continue (les coeffs de s_q sont des polynômes de degré 2 en ceux de q). De plus, $G \simeq S^3$ est connexe (sphère de $\mathbb{R}^4$). Donc $s(G)$ est connexe dans $O_3(\mathbb{R})$ et $s(1) = Id \in SO_3(\mathbb{R})$ et $1 \in G$. Donc $s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$

• surjectivité de s : Comme $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements : il suffit de montrer qu'on peut tous les atteindre. Soit $p \in P \cap G \subset G$. Alors $s_p(p) = pp\bar{p} = p$ donc s_p est une rotation d'axe (p) car s_p fixe p. De plus $(s_p)^2 = s_{p^2} = s_{-p\bar{p}} = s_{-1} = id$. Ainsi, s_p est une involution et donc un renversement d'axe (p) car $(p \notin \{\pm 1\} \Rightarrow s_p \neq id)$. On obtient donc tous les renversements de $SO_3(\mathbb{R})$. Ainsi, $s(P \cap G) \subset s(G) \subset SO_3(\mathbb{R})$ et $s(P \cap G) = SO_3(\mathbb{R})$. Ainsi $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$
Par premier théorème d'isomorphisme $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.

Rq : $G \simeq SU_2(\mathbb{C})$ donc $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\} \simeq SO_3$