Théorèmes taubériens sur les suites

Prop : Si $u_n \geq 0$ $\searrow$ tq $\sum u_n < +\infty$ alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Dém : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum u_n < +\infty$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\sum_{N+1}^{+\infty} u_n < \varepsilon$ et puisque $(u_n) \searrow$ on a : $\forall p > N$:

$$u_p(p-N) \underset{u_n \geq 0 \searrow}{\leq} \sum_{N+1}^{p} u_n \leq \sum_{N+1}^{+\infty} u_n < \varepsilon.$$

Pour $p > 2N$, on a $p - N \geq p/2$ d'où $u_p \times \frac{p}{2} < \varepsilon$ ie $(u_p)p < 2\varepsilon$ soit $u_p = o\left(\frac{1}{p}\right)$. $\square$

Prop : Soit $(a_n) \searrow \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $0 \leq \alpha < 1$ alors :

$$a_n \sim 1/n^\alpha \text{ ssi } S_n \sim \frac{1}{(1-\alpha)\, n^{\alpha-1}}$$

Dém : $\boxed{\Rightarrow}$ $\displaystyle\sum_{1}^{N} a_n \underset{dv}{\sim} \sum_{1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \sim \int_1^N t^{-\alpha}\,dt = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^N \sim \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to +\infty$ $\square$

$\boxed{\Leftarrow}$ Posons $l = \underline{\lim}\, n^\alpha a_n$ et $L = \overline{\lim}\, n^\alpha a_n$.

- On pose $\delta > 1$ et $m = \lfloor n\delta \rfloor$ alors par $\searrow$, ≥ 0 :

$$S_m - S_n = a_{n+1} + \dots + a_m \leq (m-n)\, a_n \leq (n\delta - n)\, a_n = (\delta - 1)\, n\, a_n.$$

D'où pour tout $n \geq 1$: $n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1} n^{\alpha-1}(S_m - S_n) \geq \frac{1}{\delta-1}\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha-1} m^{\alpha-1} S_m - n^{\alpha-1} S_n\right)$

Puisque $m \sim n\delta$ on a :

$$l = \underline{\lim}\, n^\alpha a_n \geq \frac{1}{\delta-1}\left(\delta^{1-\alpha}\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{\delta^{1-\alpha}-1}{\delta-1} \times \frac{1}{1-\alpha}$$

d'où $l \geq \lim\limits_{\delta \to 1^+} \frac{\delta^{1-\alpha}-1}{\delta-1} \times \frac{1}{1-\alpha} = \frac{(1-\alpha)}{1-\alpha} = 1.$

- Soit $0 < \delta < 1$ et $m = \lfloor n\delta \rfloor$ alors : $S_n - S_m = a_{m+1} + \dots + a_n \geq (n-m)\, a_n$

$$n^\alpha a_n \leq \frac{n^\alpha}{n-m}(S_n - S_m) = \frac{1}{1 - \frac{m}{n}}\left(n^{\alpha-1} S_n - \left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha-1} m^{\alpha-1} S_m\right)$$

d'où : $L = \overline{\lim}\, n^\alpha a_n \leq \frac{1}{1-\delta}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \delta^{1-\alpha}/_{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1-\delta^{1-\alpha}}{1-\delta}\right)$

$L \leq \lim\limits_{\delta \to 1^-} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1-\delta^{1-\alpha}}{1-\delta}\right) = 1.$

Donc on a : $L \leq 1 \leq l \leq L$ donc $l = L = 1$

ie $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = 1$ ie $a_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$. $\square$

Contre ex : Si $a_n \not\searrow$ c'est faux !

Par ex si $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $n \geq 2$ pair, 0 sinon

On a $S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n} a_k = \sum_{p=1}^{n} a_{2p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2p}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} \sim \sqrt{2n}$.

Et $S_{2n+1} = S_{2n}$ car $a_{2n+1} = 0$ et $\sqrt{2n} \sim \sqrt{2(n+1)}$ d'où $S_n \sim \sqrt{n}$.

Donc pour $b_n = 2a_n$ on a : $\tilde{S}_n \sim 2\sqrt{n}$. On a $\alpha = \frac{1}{2}$.

ie $b_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ soit $a_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Impossible car $\underbrace{a_{2p} \times \sqrt{2p}}_{1} \times 2 \to 1$ $\neq$ $\to 2$.