Théorème de Lévy et TCL

Ref : Zuily - Queffélec

Lm 1 : (X_n) va réelles, X var. EQUI :
i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ii) $\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$. ($\mathcal{C}_0$ = fct $\mathcal{C}^0$ tq $f(\infty) = 0$)

Thm 2 : (Lévy) (X_n) van, X van. EQUI : i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ii) $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dém : $\boxed{\Rightarrow}$ $x \mapsto e^{itx} \in C_b^0$ donc c'est vrai.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$, Par Riemann-Lebesgue $f = \hat{g} \in C_0(\mathbb{R})$.

Par Fubini on a : $\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-itX_n} dt\right) = \int_{\mathbb{R}} g(t) \mathbb{E}(e^{-itX_n}) dt$

Or $|g(t) \mathbb{E}(e^{-itX_n})| \leq |g(t)| \in L^1$ donc par cvd on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) \underset{\text{hypo}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(t) \mathbb{E}(e^{-itX}) = \mathbb{E}(f(X))$ vrai $\forall f$ tq $f = \hat{g}$ $g \in L^1$
donc vrai $\forall f \in S$ par surjectivité de $\mathcal{F}$.

Or $S(\mathbb{R})$ est dense dans $C_0(\mathbb{R})$ on a : $\forall f \in C_0(\mathbb{R})$ $\exists g \in S(\mathbb{R})$ tq $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

$|\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \leq |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(g(X_n))| + |\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))|$ pour ε fixé.

$\leq \mathbb{E}(|f(X_n) - g(X_n)|) + \varepsilon \leq \mathbb{E}(\varepsilon) + \varepsilon = 2\varepsilon$.

car pour $n \gg 1$, $|\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))| \leq \varepsilon$

$\square$

Thm 3 : (TCL) (X_i) iid de loi identique à X. $X \in L^2$.
$m = \mathbb{E}(X)$ $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. On a $\dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ avec $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Dém : Quitte à centrer et réduire, ops $m = 0$ et $\sigma = 1$.

On a $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \exp(-t^2/2)$. D'après le thm de Lévy, il suffit de mq
$\mathbb{E}(e^{itS_n/\sqrt{n}}) \to e^{-t^2/2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Puisque $X \in L^2$ alors $\varphi_X \in C^2$ et vérifie $\begin{cases} \varphi'(0) = i\mathbb{E}(X) = 0 \\ \varphi''(0) = -\mathbb{E}(X^2) = -1 \end{cases}$

De plus, puisque (X_i) sont iid on a : $\mathbb{E}(e^{itS_n/\sqrt{n}}) = \varphi_X\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$.

En faisant un DL on a : $\varphi_X\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi(0) + \dfrac{t}{\sqrt{n}}\varphi'(0) + \dfrac{t^2}{2n}\varphi''(0) + \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ avec $\varepsilon_n \to 0$, $\in \mathbb{C}$

$= 1 - t^2/2n + \varepsilon_n/n$.

Par le lemme suivant avec $z_n = \varepsilon_n - t^2/2 \to -t^2/2$ on obtient :

$\mathbb{E}\left(e^{itS_n/\sqrt{n}}\right) = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \to \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t)$

ce qui prouve la CV en loi. $\square$

Lem 4 : $z_n \in \mathbb{C}$, tq $z_n \to z \in \mathbb{C}$. Alors $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \to \exp(z)$

Dem : Puisque $1+\frac{z_n}{n} \to 1$, quitte à extraire qps que ses termes n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$ (ie $1+\frac{z_n}{n} \notin \mathbb{R}_-$).

La détermination principale du log vérifie $\mathrm{Log}(1+z) \underset{z\to 0}{=} z+o(z)$

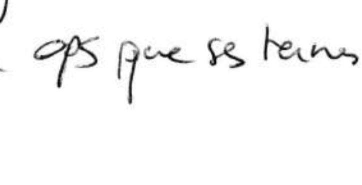
Donc $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \exp\left(\mathrm{Log}\left(1+\frac{z_n}{n}\right) n\right) = \exp\left(z_n + o(z_n)\right) \to \exp(z)$. $\square$

[proche de 1, on a $\mathrm{Log}(1+z)$ = son DSE classique d'où le DL $\mathrm{Log}(1+z) = z+o(z)$]
2 log différent de $2i\pi\mathbb{Z}$, équivalent en 1) $(z\sim 0)$ ou $\left|\exp(z) - \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right| \le \exp(|z|) - \left(1+\frac{|z_n|}{n}\right)^n$

Dem du Lem 1 : $\boxed{\Rightarrow}$ trivial

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$, $f \in C_b$ et $A>0$ tq $\mathbb{P}_X(x, |x| \geq A) \leq \varepsilon$.

On pose $\varphi = \begin{cases} 1 \text{ sur } [-A,A] \\ 0 \text{ sur }]-\infty,-2A] \cup [2A,+\infty[\\ \text{affine entre} \end{cases}$



On a $\int_{\mathbb{R}} |1-\varphi| \, d\mathbb{P}_X \leq \mathbb{P}_X(|x| \geq A) \leq \varepsilon$.

Alors $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_{X_n} - \int f \, d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) \, d\mathbb{P}_{X_n} + \left(\int_{\mathbb{R}} f\varphi \, d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi \, d\mathbb{P}_X\right)$

$+ \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) \, d\mathbb{P}_X = A_n + B_n + C_n$

- $|A_n| \leq \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mathbb{P}_{X_n}\right) \Rightarrow \overline{\lim} |A_n| \leq \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mathbb{P}_X\right)$
- $f\varphi \in C_b$ donc $|B_n| \to 0$ $\qquad = \|f\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}} (1-\varphi) \, d\mathbb{P}_X\right) \leq \varepsilon \|f\|_\infty$
- $|C_n| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$. Donc $\overline{\lim} \left|\int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_X\right| \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty$ $\forall \varepsilon > 0$

Donc $\overline{\lim} = \underline{\lim} = \lim = 0$. Donc $|\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. $\square$