Calculs de la TF de la gaussienne

On va mq $\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}\, e^{-t^2/2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

et $\forall a > 0$ $\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-t^2/4a}$

① Via une EDO

$\varphi(x) = e^{-ax^2}$.

Mq $\psi = \hat{\varphi}$ vérifie une EDO. Déjà $\psi \in C^1$ car :

- $x \mapsto e^{-itx} e^{-ax^2} \in L^1 \;\forall t$, $t \mapsto e^{-itx} e^{-ax^2} \in C^1 \;\forall x$
- $\left|\partial_t \left(e^{-itx} e^{-x^2 a}\right)\right| = |x| e^{-x^2 a} \in L^1(\mathbb{R})$ indépendant de t $\forall x$.

Donc $\psi'(t) = \int_{\mathbb{R}} -ix e^{-itx} e^{-ax^2} dx = i \int_{\mathbb{R}} \frac{-2ax\, e^{-ax^2}}{2a} e^{-itx} dx$

$$= \frac{i}{2a} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-ax^2}\right)' e^{-itx} = \underbrace{\left[e^{-itx} e^{-ax^2}\right]_{\mathbb{R}}}_{=0 \;(a>0)} - \frac{i}{2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} (-it) e^{-itx} dx$$

$$= \frac{-t}{2a} \psi(t)$$

Donc $\psi(t) = \psi(0) e^{-t^2/4a}$. Et $\psi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

D'où $\psi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-t^2/4a} \quad \forall t \in \mathbb{R}$. ☐

② Par prolongement analytique

On pose $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} dx$. Mq F est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

- $x \mapsto e^{zx} e^{-x^2}$ est mesurable $\forall z$
- $z \mapsto e^{zx} e^{-x^2}$ est holo sur $\mathbb{C}$ $\forall x$
- Soit K compact de $\mathbb{C}$, $K = \underbrace{[a,b]}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{[c,d]}_{i\mathbb{R}}$. Pour $z \in K$ on a :

$\left|e^{zx} e^{-x^2}\right| = e^{x \operatorname{Re}(z)} e^{-x^2} \leq e^{|x| \max\{|a|, |b|\}} e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ indépendant de z.

Donc F est holomorphe sur K, $\forall K$ compact donc sur $\mathbb{C}$.

Pour $y \in \mathbb{R}$, $F(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{yx} e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y/2)^2} e^{y^2/4} dx = e^{y^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$

$= \sqrt{\pi}\, e^{y^2/4}$. Or $z \mapsto e^{z^2/4} \sqrt{\pi}$ est holo sur $\mathbb{C}$ et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec F donc sont égales sur $\mathbb{C}$ (domaine) (contient un point d'accumulation).

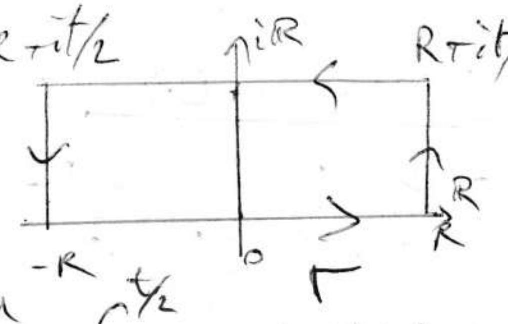
Ainsi, $\varphi(t) = F(-it) = \sqrt{\pi}\, e^{-t^2/4} \quad \forall t \in \mathbb{R}$. ☐

③ Par formule de Cauchy (résidus)

On a $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-x^2} dx = e^{-t^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+it/2)^2} dx$

Posons $f(z) = e^{-z^2}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Par formule de Cauchy : $\int_\Gamma f(z)dz = 0$



soit :

$$\int_{-R}^{R} f + \int_0^{t/2} f(R+i\theta)\, i\, d\theta - \int_{-R}^{R} f(u+it/2)\, du - \int_0^{t/2} f(-R+i\theta)\, i\, d\theta = 0$$

$$\left|\int_0^{t/2} f(\pm R+i\theta)\, i\, d\theta\right| \le \int_0^{t/2} \left|e^{-(\pm R+i\theta)^2}\right| d\theta = \int_0^{t/2} e^{-R^2} e^{\theta^2} d\theta = e^{-R^2} C_t \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+it/2)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+it/2)^2} du$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

Donc $\forall t\in\mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+it/2)^2} du = \sqrt{\pi}$. Alors $\varphi(t) = \sqrt{\pi}\, e^{-t^2/4}$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

④ Avec le problème des moments

Calculons $\mu_n = \mathbb{E}(|X|^n)$ $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ pour $n\in\mathbb{N}$. $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} |x|^n \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \overset{\text{parité}}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 2\int_0^{+\infty} -x^{n-1} \frac{\left(e^{-x^2/2}\right)'}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{-2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} x^{n-1}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} (n-1)\frac{x^{n-2}}{\sqrt{2\pi}} dx \overset{\text{parité}}{=} (n-1)\mu_{n-2}$$

$$\mu_{2n} = (2n-1)\mu_{2(n-1)} = (2n-1)(2(n-1)-1)\mu_{2(n-2)} = (2n-1)(2n-3)\dots 1\, \underbrace{\mu_0}_{=1} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \le (2n)!$$

On a donc $\overline{\lim}\left(\frac{\mu_{2n}}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}} \le \lim 1^{\frac{1}{2n}} = 1 < +\infty$ donc $\mathcal{N}(0,1)$ est caractérisée par ses moments. De plus, φ est analytique : $\varphi(t) = \sum_{k\ge0} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k$.

Or $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k) = i^k \mu_k$ si k est pair, 0 sinon.

Donc $\varphi(t) = \sum_{k\ge0} \frac{i^{2k}\mu_{2k}}{(2k)!} t^{2k} = \sum_{k\ge0}\frac{(-1)^k}{2^k k!} t^{2k} = \sum_{k\ge0} \frac{(-t^2/2)^k}{k!} = e^{-t^2/2}$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

d'où $\widehat{\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}} = e^{-t^2/2}$.